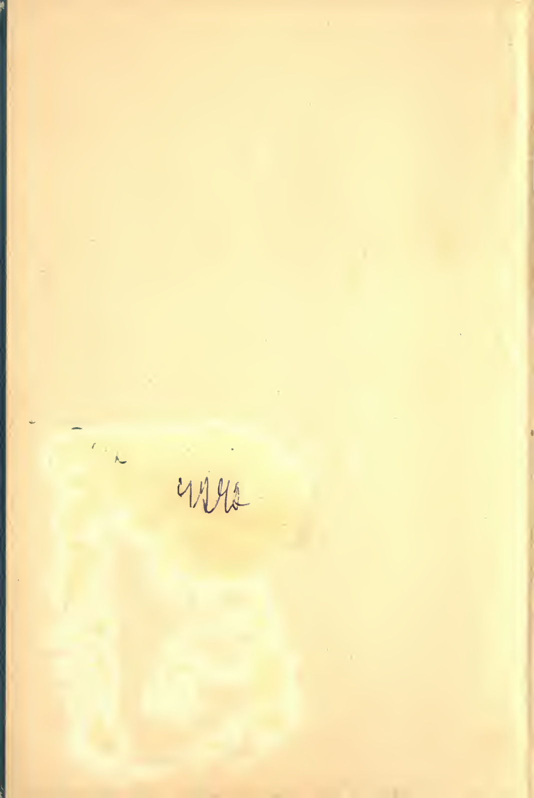
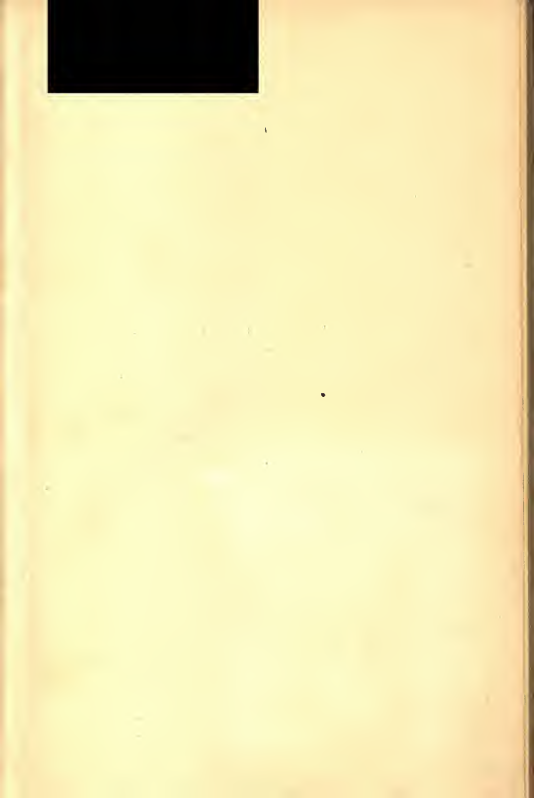
А. И. Борисенко
И. Е. Тарапов

Векторный анализ и начала тензорного исчисления

Высшая школа
1963





А. И. БОРИСЕНКО, И. Е. ТАРАПОВ

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И НАЧАЛА ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических
учебных заведений*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1963

В книге излагаются основные сведения из векторной и тензорной алгебры, понятие тензорных полей и тензорный анализ, включающий интегральные теоремы; содержится ряд задач тензорного исчисления в применении к механике сплошных сред и электромагнетизму.

Все операции подробно разобраны в ортогональных системах координат и дано обобщение на случай произвольной криволинейной системы координат.

Книга предназначена для студентов, изучающих аэрогидромеханику, теорию упругости и другие предметы, использующие тензорный аппарат.

ПРЕДИСЛОВИЕ К 1 ИЗДАНИЮ

Необходимость применения тензорного исчисления в современной физике вызвана не столько удобством и наглядностью математических формулировок законов, сколько объективными свойствами изучаемых явлений.

Что касается предметов, изучаемых в технических вузах, то в первую очередь в гидромеханике, теории упругости и электротехнике векторное исчисление давно уже широко применяется. Успехи технических наук, углубление их теоретической базы требуют знания основ тензорного исчисления, особенно той части, которая связана с рассмотрением декартовой системы координат.

Современная научно-техническая литература изобилует примерами широкого использования тензорного и векторного исчисления. Лучшие учебники для втузов по специальным дисциплинам учитывают эту тенденцию совершенствования математического аппарата современных естественных наук.

Программы по математике наших втузов включают необходимый материал по важному разделу основ векторной алгебры и векторного анализа. Однако иногда изложение этих разделов носит относительно формальный характер, и это естественно, ибо физическое содержание этого математического аппарата наиболее полно может быть раскрыто в тех специальных дисциплинах, которые используют его.

Практика преподавания во втузе привела к выводу о желательности связать изложение теоретической гидромеханики с систематическим ознакомлением с тензорным исчислением, в первую очередь с векторным.

В этой книге собран материал, который может понадобиться студентам инженерных специальностей. Авторам пришлось идти по пути некоторого расширения излагаемых сведений, чтобы не терять из виду физических основ аппарата и не стать на путь преподнесения голых правил и приемов. Особое внимание обращено на физическое содержание тензорного исчисления.

Поэтому книга включает некоторые сведения, которые являются предметом изучения на физических и механических отделениях университетов. Большинство этих сведений (часть тензорной алгебры) напечатано петитом. В то же время авторы совершенно не касались общего определения тензоров, относящегося к произвольным системам координат, и связанного с ним понятия ковариантного дифференцирования. Эти сведения, необходимые в электродинамике и других разделах современной физики, читатель сможет найти в более специальных пособиях.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую благодарность профессорам Я. П. Бланку, В. Л. Герману, Г. И. Дринфельду и А. Д. Мышкису за сделанные ими ценные замечания, значительно улучшившие первоначальный вариант книги.

Особую признательность авторы выражают профессору Н. И. Ахиезеру, проявлявшему постоянный интерес и внимание к книге.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО 2-МУ ИЗДАНИЮ

При подготовке 2-го издания, помимо пересмотра и уточнения формулировок, были приняты во внимание замечания и пожелания учащихся и преподавателей и, учитывая все большее развитие и применение тензорного анализа, добавлены сведения о ковариантных и контравариантных составляющих вектора и тензора, о дифференцировании и несколько расширен раздел об операциях с тензорами: эти разделы, напечатанные петитом, при первом чтении можно пропустить.

Существенные замечания по первому изданию книги профессора П. К. Рашевского и профессора В. А. Марченко приняты с благодарностью во внимание.

Авторы

Глава первая

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

В этой главе рассматриваются основные алгебраические действия над векторами, основанные на широко распространенном определении вектора. В дальнейшем будет дано естественное обобщение этих действий и основных понятий, составляющих предмет тензорной алгебры.

1.1. Векторы и скаляры

Физические величины, для определения которых достаточно знать одно число (положительное, отрицательное или нуль), называются ***скалярами.*** Таковы — температура, плотность, масса, работа силы. Сравниваться могут скаляры одинаковой размерности. Два скаляра одинаковой размерности равны, если их знаки и численные значения, получающиеся при измерении одной и той же единицей измерения, одинаковы.

Часто приходиться иметь дело с величинами, для определения которых, кроме численного значения, необходимо указать направление в пространстве. Таковы — перемещение, скорость, ускорение, сила, момент силы, напряжение электрического поля, диэлектрическая поляризация и т. п. Рассмотрение такого рода величин приводит к понятию вектора*.

Действия над векторами подчиняются правилам векторной алгебры, которые будут рассмотрены ниже.

Скалярами и векторами не ограничиваются классы физических величин. Многие физические величины имеют более сложную структуру, чем векторы и скаляры, и для определения их недостаточно знать числовые значения и направления. Они называются тензорами (второго и высших рангов). Так, рассмотрение совокупности векторов упругих напряжений на всевозможных площадках, которые можно провести через некоторую точку в упругом теле, приводит к понятию тен-

* Вектор — направленный отрезок, от латинского слова vehere — влечь, тянуть.

зора (2-го ранга) упругих напряжений, рассмотрение деформации произвольного элементарного объема упругого тела приводит к понятию тензора деформаций.

Откладывая рассмотрение тензоров на дальнейшее, остановимся более подробно на векторах.

Вектор $\boldsymbol{A}$ изображается отрезком прямой, направление которого совпадает с направлением заданной физической величины, а длина в выбранном масштабе характеризует ее численное значение (модуль вектора $A = |\boldsymbol{A}|$).

Сравнивать можно только векторы, имеющие одинаковую размерность, т. е. одинаковый физический или геометрический смысл. При сравнении двух векторов одинаково существенны как величины, так и направления их.

Два вектора $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *одинаковой размерности равны, если модули их одинаковы и направления этих векторов совпадают.* Тогда пишут $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

Векторы свободные, скользящие, связанные. Иногда различают векторы свободные, скользящие и связанные.

Свободный вектор по физическому смыслу можно переносить параллельно самому себе и прилагать в любой точке (например, скорость поступательного движения тела). Свободный вектор (рис. 1.1, *а*) в пространстве полностью определяется тремя числами, например, тремя его проекциями на оси декартовой системы координат; его можно задать величиной (длиной отрезка, модулем вектора) и двумя независимыми углами, образуемыми вектором с осями координат и т. п.

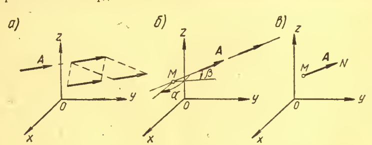


Рис. 1.1. а) Свободный вектор может быть перенесен параллельно самому себе. б) Скользящий вектор может быть перенесен по линии его действия. в) Связанный вектор.

Скользящие векторы можно переносить по прямой, определяющей направление вектора (например, вектор силы, приложенной к твердому телу). Скользящий вектор (рис. 1. 1, *б*) требует для своего определения в пространстве пяти чисел: например, координат точки M пересечения прямой, на которой лежит вектор, с какой-либо координатной плоскостью (два числа), длины вектора (одно число) и двух независимых углов α и β с осями (два числа).

Связанный вектор по физическому смыслу относится к определенной точке (например, скорость и ускорение точки твердого тела, движущегося произвольным образом). Связанный вектор (рис. 1.1 *в*) определяется шестью числами, например координатами начала и конца вектора (точки M и N).

Свободные векторы являются наиболее общим случаем задания величин определяемых численным значением и направлением. Изучение скользящих и связанных векторов можно свести к изучению свободных векторов. Поэтому в дальнейшем мы будем изучать только свободные векторы.

1.2. Сложение и вычитание векторов. Проекция вектора на ось

Сложение векторов и его свойства. Определением векторного сложения служит следующее правило.

*Суммой двух векторов (**A** и **B**) является третий вектор (**C**), изображаемый диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах* (рис. 1, 2, *а*).

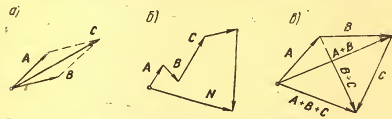


Рис. 1.2. а) Сумма двух векторов $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. б) Сумма нескольких векторов $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}\ldots=\boldsymbol{N}$. в) Ассоциативность векторного сложения $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$

Следствием этого определения является правило суммирования нескольких векторов:

*Суммой нескольких векторов (**A**, **B**, **C**, ...) является вектор **N**, представляющий замыкающую многоугольника, построенного на слагаемых векторах* (рис. 1.2, *б*).

Это правило приобретает ясный физический смысл, если под слагаемыми векторами понимать последовательные перемещения некоторой точки в пространстве, тогда их сумма является результатом этих последовательных перемещений и дает общее перемещение точки.

Из определения векторного сложения следует, что действие сложения векторов обладает характерными свойствами обычного алгебраического суммирования, а именно:

1) *коммутативностью*, т. е.

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A},$$

2) *ассоциативностью*, т. е.

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}.$$

Таким образом, *при векторном сложении результат не зависит* от порядка слагаемых и сумму более чем двух векторов можно писать без скобок (рис. 1, 2, *в*).

То, что физическая величина характеризуется численным значением и направлением, является необходимым, но отнюдь не достаточным признаком того, что данная величина является вектором. Она обязательно должна подчиняться действиям векторной алгебры, в частности векторному (геометрическому) сложению.

В качестве примера, иллюстрирующего это положение, рассмотрим поворот твердого тела вокруг некоторой оси; он может быть представлен отрезком, равным по величине углу поворота и направленным по оси вращения, например, в ту сторону, откуда поворот виден против хода часовой стрелки. Однако можно показать, что такие отрезки не подчиняются правилу векторного сложения, причем их сумма зависит от порядка слагаемых.

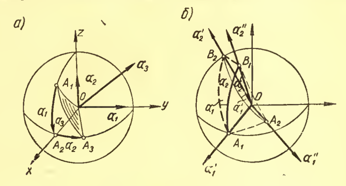


Рис. 1.3. Поворот сферы вокруг некоторой оси: а) направленный отрезок α_3 не лежит в плоскости отрезков α_1 и α_2; б) два способа перевода дуги из положения A_1B_1 в A_2B_2

А. Пусть сфера (рис. 1.3, *а*) повернулась вокруг оси Oy на угол α_1 так, что некоторая точка сферы из положения A_1 переместилась в положение A_2; изобразим этот поворот в виде направленного отрезка α_1. Пусть второй поворот сферы совершается вокруг оси Oz на угол α_2, так что точка перейдет из положения A_2 в A_3; этот поворот тогда изобразится направленным отрезком α_2. Тогда по определению введенных нами направленных отрезков поворот сферы, переводящий точку из положения A_1 в A_3, должен быть, с одной стороны, суммой отрезков α_1 и α_2, а с другой изображен отрезком α_3, перпендикулярным плоскости A_1OA_3. Поскольку α_3 не лежит в плоскости zOy, этот отрезок не может быть суммой α_1 и α_2. Этот пример становится особенно наглядным для случая $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

Б. Поворот сферы, переводящий некоторую дугу на ней из положения A_1B_1 в положение A_2B_2, может быть осуществлен двумя путями (рис. 1.3, *б*):

а) поворот вокруг оси OA_1 на угол α_1 («вектор» α_1') + поворот вокруг оси OB_2 на угол α_2 («вектор» α_2');

б) поворот вокруг оси OB_1 на угол α_2' («вектор» α_2'') + поворот вокруг оси OA_2 на угол α_1' («вектор» α_1'').

Несмотря на то, что слагаемые поворота равны по величине и изменение их последовательности не меняет результата (дуга из A_1B_1 перейдет

в A_2B_2), нетрудно видеть, что изображение поворота в виде векторов влечет за собой некоммутативность суммы векторов, т. е.

$$\alpha_1' + \alpha_2' \neq \alpha_2'' + \alpha_1''.$$

В противоположность конечным поворотам твердого тела, бесконечно малые повороты являются векторами (см. задачу 11 этой главы).

Вычитание векторов и нулевой вектор. Рассмотрим действие вычитания векторов.

Под вектором $-\boldsymbol{A}$ (минус $\boldsymbol{A}$) подразумевается вектор, имеющий величину, равную величине вектора $\boldsymbol{A}$, а направление прямо противоположное. Будем считать в этом случае, что векторы $\boldsymbol{A}$ и $-\boldsymbol{A}$ *противоположны*.

Нулевым вектором называется вектор, модуль которого равен нулю. Такому вектору нельзя приписать определенное направление. Ему может быть приписано любое направление в пространстве.

Очевидно, вектор, равный своему противоположном вектору, есть нулевой.

Вычитание как действие, обратное сложению, сводится к определению одного из слагаемых ($\boldsymbol{X}$) по известной сумме ($\boldsymbol{A}$) и другому слагаемому — вектору ($\boldsymbol{B}$):

$$\boldsymbol{B} + \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}.$$

Используя понятие противоположных векторов, отсюда нетрудно получить

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}.$$

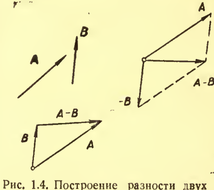


Рис. 1.4. Построение разности двух векторов

Таким образом, *вычитание векторов сводится к сложению уменьшаемого с вектором, противоположным вычитаемому* (рис. 1.4).

Проекция вектора на ось. *Проекцией A_u вектора* **A** *на ось* (u) (рис. 1.5) *называется длина отрезка, отсекаемого на этой оси перпендикулярными к ней плоскостями, проведенными через концы вектора* **A**; *взятая со знаком плюс, если направление от проекции начала вектора на ось к проекции его конца совпадает с положительным направлением оси, и со знаком минус — в противном случае.*

Ортом оси (u) *называется вектор* $\boldsymbol{u}_0$, *направленный в положительную сторону оси и равный по величине единице*, т. е.

$$u_0 = |\boldsymbol{u}_0| = 1.$$

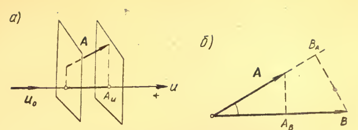


Рис. 1.5. а) Проекция вектора на ось. б) Проекция одного вектора на направление другого

Обозначим угол между вектором $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{u}_0$ через $\varphi = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{u}_0)$.

Проекцию A_u вектора $\boldsymbol{A}$ на ось (u) можно вычислять по формуле

$$A_u = A\cos\varphi = A\cos(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{u}_0).$$

Действительно, легко видеть, что $|A\cos\varphi|$ всегда дает длину отрезка оси (u) между плоскостями, проведенными через концы вектора перпендикулярно к оси. Если $\varphi < \frac{\pi}{2}$, то направление от проекции начала вектора к проекции конца вектора совпадает с положительным направлением (u), в этом случае $\cos\varphi > 0$ так, что и $A_u > 0$. Если $\varphi > \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi < 0$, и $A_u < 0$ в соответствии с определением проекции.

Следовательно, *проекция вектора на какую-либо ось равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и положительным направлением оси.*

Нетрудно показать, что *проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций слагающих этой суммы на эту же ось* (упражнение 1 этой главы)

1.3 Умножение вектора на скаляр. Линейная зависимость векторов. Разложение вектора

Умножение вектора на скаляр. *Произведение вектора $\boldsymbol{A}$ на скаляр m* представляет собой вектор $\boldsymbol{B}$, модуль которого в $|m|$ раз больше модуля вектора $\boldsymbol{A}$, а направление совпадает с $\boldsymbol{A}$ в случае $m > 0$ и прямо противоположно $\boldsymbol{A}$ в случае $m < 0$.

Таким образом,

$$m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B};\ |\boldsymbol{B}| = B = |m|\cdot|\boldsymbol{A}| = |m|A.$$

В частном случае $m = -1$, векторы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A}$ противоположны.

Векторы $\boldsymbol{A}$ и $m\boldsymbol{A}$ $(m \gtreqless 0)$ параллельны между собой. Они представляют простейший случай линейно зависимых векторов.

Линейная зависимость векторов. Векторы коллинеарные и компланарные. *Векторы* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$... (всего n) *называются линейно зависимыми, если существуют скаляры* $c_1, c_2, c_3, \ldots$ $\ldots, c_n$, *не все равные нулю, такие, что*

$$c_1\boldsymbol{A} + c_2\boldsymbol{B} + c_3\boldsymbol{C} + \ldots c_n\boldsymbol{N} = 0,$$

т. е. если существует линейная комбинация векторов, обращающаяся в нуль.

Два линейно зависимых вектора параллельны между собой.

Действительно, пусть $c_1\boldsymbol{A} + c_2\boldsymbol{B} = 0$, причем, по крайней мере, $c_2 \neq 0$. Тогда, обозначая $\frac{c_1}{c_2} = -m$, получим $\boldsymbol{B} = m\boldsymbol{A}$. Отсюда следует параллельность векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Такие векторы называются *коллинеарными.*

Три линейно зависимых вектора лежат в одной плоскости (или параллельны одной плоскости).

Действительно, пусть $c_1\boldsymbol{A} + c_2\boldsymbol{B} + c_3\boldsymbol{C} = 0$, причем, по крайней мере, $c_3 \neq 0$. Тогда, обозначая $\frac{c_1}{c_3} = -m$, $\frac{c_2}{c_3} = -n$, получим

$$\boldsymbol{C} = m\boldsymbol{A} + n\boldsymbol{B}.$$

Отсюда следует, что вектор $\boldsymbol{C}$ лежит в одной плоскости с векторами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ (ибо $\boldsymbol{C}$ является суммой векторов $m\boldsymbol{A}$ и $n\boldsymbol{B}$, коллинеарных $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$). Такие векторы называются *компланарными.*

Разложение векторов. Рассмотрим два принципиально важных утверждения, касающихся представления любого вектора в виде линейной комбинации двух или трех других векторов (разложение вектора по двум или трем другим векторам).

А. Если два вектора $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *линейно независимы* (не являются коллинеарными векторами), *то любой вектор* $\boldsymbol{C}$, *компланарный с* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *может быть единственным образом разложен по этим векторам,* т. е. справедлива формула

$$\boldsymbol{C} = m\boldsymbol{A} + n\boldsymbol{B}. \tag{1.1}$$

Поскольку векторы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ компланарны, то имеет место равенство

$$c_1\boldsymbol{A} + c_2\boldsymbol{B} + c_3\boldsymbol{C} = 0. \tag{*}$$

Так как векторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ по условию линейно независимы, то $c_3 \neq 0$. Разделив (*) на c_3 и обозначив $\frac{c_1}{c_3} = -m$, $\frac{c_2}{c_3} = -n$, получим разложение (1.1). Покажем, что оно единственно. Пусть наряду с (1.1) имеет место другое разложение:

$$\boldsymbol{C} = m'\boldsymbol{A} + n'\boldsymbol{B}.$$

Вычитая это равенство из (1.1), получим $(m-m')A+(n-n)B=0$. Отсюда следует, что $m=m'$, $n=n'$, ибо по условию A и B — линейно независимые векторы.

Таким образом, разложение (1.1) единственно.

Б. Если три вектора A, B, C линейно независимы (не являются компланарными векторами), то любой вектор D может быть единственным образом разложен по этим векторам, т. е. справедлива формула

$$D=mA+nB+pC. \tag{1.2}$$

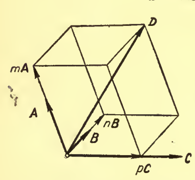


Рис. 1.6. Любой вектор D может быть единственным образом разложен по трем некомпланарным векторам A, B, C

Отложим четыре вектора A, B, C, D от общего начала O (рис. 1.6). Через конец вектора D проведем плоскости, параллельные плоскостям векторов A и B, A и C, B и C; эти три плоскости вместе с плоскостями векторов A и B, A и C, B и C образуют параллелепипед. Одной из диагоналей этого параллелепипеда является вектор D. Векторы A, B и C, исходящие из начала O, направлены соответственно по трем его ребрам. В силу коллинеарности векторов A, B, C и mA, nB, pC, имеющих модули, равные длинам ребер параллелепипеда, можно показать справедливость формулы (1.2).

Если наряду с разложением (1.2) имеет место также и разложение

$$D=m'A+n'B+p'C,$$

то

$$(m-m')A+(n-n')B+(p-p')C=0.$$

Откуда $m=m'$, $n=n'$, $p=p'$, ибо по условию A, B, C — линейно независимые векторы.

Отсюда: *любые четыре вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы.*

Векторный базис. *Система любых трех линейно независимых векторов e_1, e_2, e_3 образует, по определению, базис трехмерного пространства.*

Тройка базисных векторов, в силу доказанного выше, обладает тем свойством, что для всякого вектора A существует разложение

$$A=me_1+ne_2+pe_3, \tag{1.3}$$

причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Подчеркнем, что в качестве базиса могут быть выбраны три *любых некомпланарных вектора.*

Откладывая тройку базисных векторов e_κ $(\kappa=1, 2, 3)$ от общего начала O и обозначая через Ox^κ прямые, на которых лежат базисные векторы (κ — индекс, а не степень;

удобство такого обозначения станет ясным из дальнейшего), получим косоугольную декартову систему координат с осями Ox^1, Ox^2, Ox^3 и началом O (рис. 1.7, *а*) — базисные векторы $\boldsymbol{e}_к$ называются ***масштабными векторами***, а концы этих векторов, отложенных от начала координат,— ***единичными точками*** осей координат.

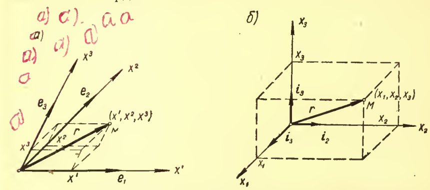


Рис. 1.7. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ и его компоненты: а) в косоугольной декартовой системе координат; б) в прямоугольной декартовой системе координат

Если базисные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ взаимно ортогональны и модули их равны единице, то они называются *ортами* прямоугольной декартовой системы координат и обозначаются через $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ для осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 (рис. 1.7, *б*).

Положение точки M в пространстве определяется ее радиус-вектором $\boldsymbol{r}$ (рис. 1.7, *б*). Координатами точки M в прямоугольной декартовой системе координат будут расстояния (со знаком) x_1, x_2, x_3 до плоскостей x_2Ox_3, x_3Ox_1, x_1Ox_2 и поэтому

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_1x_1 + \boldsymbol{i}_2x_2 + \boldsymbol{i}_3x_3.$$

Одним из важнейших достоинств векторного исчисления является то, что уравнения, описывающие то или иное физическое явление, можно формулировать безотносительно к координатным системам. Однако при решении конкретных задач, всегда связанных с вычислениями, каждую задачу обычно преобразовывают к виду, содержащему скалярные величины. Это можно сделать, пользуясь подходящей (удобной) системой координат, когда векторное (тензорное) уравнение разлагается на эквивалентную систему скалярных уравнений, содержащих только скаляры (числа), подчиняющиеся правилам арифметического счета.

Каждое такое разложение связано с выбором подходящего базиса, который строится в соответствии с выбранной сис-

темой координат. В подавляющем большинстве практически встречающихся случаев пользуются прямоугольными системами координат — прямолинейной (декартовой) или криволинейными: цилиндрическими, сферическими, эллиптическими и т. п. В прямолинейной системе координат базисные векторы одинаковы во всех точках по величине и направлению; в криволинейных — направления базисных векторов меняются от точки к точке.

Рассмотрим сначала для простоты точку на плоскости — ее положение полностью определяется радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ относительно некоторой фиксированной точки (полюса) O, который, конечно, не связан и не зависит ни от какой системы координат. Чтобы производить вычисления, нужно выбрать какую-либо систему координат, и тогда положение точки на плоскости будет определяться двумя числами-координатами: назовем их p и q. Эти числа уже будут зависеть от принятой системы координат, от принятой системы отсчета.

В прямоугольной декартовой системе координат, например, это будут расстояния (со знаком) $p \equiv x_1$ и $q \equiv x_2$ до двух взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через начало координат.

Если сохранять постоянное значение одной координаты, например, $p = \text{const}$, и изменять непрерывно другую, получим координатную линию. Через каждую точку на плоскости проходят две координатные линии. В прямоугольной декартовой системе это будут прямые, параллельные осям координат.

Направление координатных линий удобно задавать при помощи базиса — координатных векторов; на плоскости их два: $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, направленных по касательным в сторону возрастания соответствующей координаты* (рис. 1.8, *а*).

В косоугольной декартовой системе координат (угол $y^1Oy^2 = \theta$) длины векторов базиса, совпадающего по направлению с осями координат, в общем случае могут быть взяты неодинаковыми.

Прямые, проведенные через точку параллельно осям координат, можно принять за координатные линии, и положение точки на плоскости тогда определится двумя числами — координатами, выражающими длину отрезков (со знаком), y^1 и y^2, отсекаемых этими линиями на осях координат и измеренных в долях длины базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ (рис. 1.8, *б*).

Можно условиться в качестве двух чисел, определяющих положение точки на плоскости, брать длины отрезков (со

* Базисные векторы — орты $\boldsymbol{i}_1$ и $\boldsymbol{i}_2$ — одинаковы во всех точках плоскости.

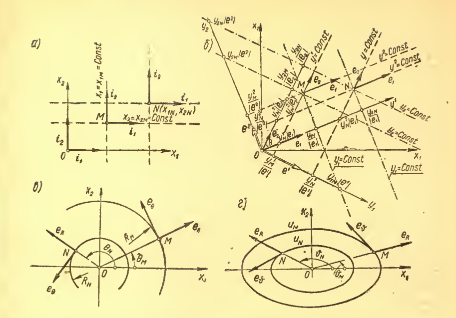


Рис. 1.8. Системы координат на плоскости: а) прямоугольная декартова; б) косоугольная декартова; в) полярная; г) обобщенная полярная

знаком), отсекаемых перпендикулярами на осях координат (т. е. определять положение точки не координатами ее, а проекциями на базисные векторы).

Как будет показано ниже, удобно ввести так называемые взаимные базисные векторы $\boldsymbol{e}^1$ и $\boldsymbol{e}^2$, перпендикулярные векторам $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_1$ соответственно и направленные так, что углы $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}^1)$ и $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}^2)$ острые, с длиной $|\boldsymbol{e}^1| = 1 : |\boldsymbol{e}_1| \cos(90° - \theta)$, $|\boldsymbol{e}^2| = 1 : |\boldsymbol{e}_2| \cos(90° - \theta)$, и длину отрезков (на осях y^1 и y^2) выражать в единицах длины векторов $|\boldsymbol{e}^1|$ и $|\boldsymbol{e}^2|$; эти числа y_1 и y_2 принято писать с индексом внизу: удобство таких обозначений выяснится позже.

Координатные линии в этом взаимном базисе $(\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2)$ будут прямые, перпендикулярные осям взятого основного базиса (рис. 1.8, *б*).

В прямоугольной декартовой системе координат оба базиса и обе системы координатных линий совпадают.

Определяя один и тот же радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ в прямоугольной декартовой системе (x_1, x_2) координат и в какой-либо другой (p, q)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x_1, x_2) = \boldsymbol{r}(p, q),$$

можно установить взаимно однозначное соответствие между координатами p, q и x_1, x_2 в виде системы равенств

$$p = p(x_1, x_2), \quad q = q(x_1, x_2)$$

и обратно

$$x_1 = x_1(p, q), \quad x_2 = x_2(p, q).$$

В разобранном выше примере косоугольных координат с координатными линиями, параллельными осям координат, беря оси x_1 и y^1 совпадающими, а длины базисных векторов равными единице:

$$y^1 = x_1 - x_2 \operatorname{ctg} \theta, \quad y^2 = \frac{x_2}{\sin \theta};$$

$$x_1 = y^1 + y^2 \cos \theta, \quad x_2 = y^2 \sin \theta$$

(здесь числа 1 и 2 суть индексы, а не степени).

Если теперь определять положение точки на плоскости двумя такими числами — расстоянием $R (0 \leqslant R < +\infty)$ от некоторой фиксированной точки O на плоскости (полюса) и углом $\theta (0 \leqslant \theta < 2\pi)$ между прямой из полюса O в рассматриваемую точку и фиксированной полупрямой из полюса (полярной осью), то получим так называемую полярную систему координат. Координатные линии — это окружности радиуса $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и полупрямые (лучи) $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{x_2}{x_1}$, и обратно: $x_1 = R \cos \theta$, $x_2 = R \sin \theta$ (предполагается, что начало декартовых прямоугольных координат совпадает с полюсом и ось Ox_1 с полярной осью). В этой системе криволинейных координат направления базисных векторов в каждой точке различны, но пересекаются все они под прямым углом — полярная система координат ортогональна (рис. 1.8, *в*).

Координатными линиями обобщенной полярной системы координат являются эллипсы $u^2 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}$ и лучи $\theta = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} \frac{x_2}{x_1}$ $(0 \leqslant u < +\infty, \ 0 \leqslant \theta < 2\pi)$ $a > 0$; $b > 0$; $a \neq b$); обратно $x_1 = au \cos \theta$, $x_2 = bu \sin \theta$.

Как видно (рис. 1.8, *г*), эта система координат не ортогональна; векторные базисы меняются при переходе от точки к точке (при $a = b$ она переходит в обычную полярную).

Приведенные соображения легко распространить и на случай трех измерений.

На рис. 1.9, *а* приведена цилиндрическая система координат: обобщенную цилиндрическую систему координат (не ортогональную) нетрудно представить по аналогии с полярной и обобщенной полярной системами координат. На рис. 1.9, *б* дана сферическая система координат — она ортогональна.

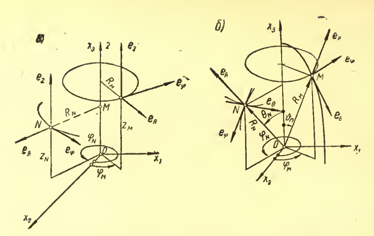


Рис. 1.9. Криволинейные координаты в пространстве:

а) цилиндрическая система координат — положение точки M определяется координатой z ($= x_3$) по оси проходящей через точку O, расстоянием R от оси и углом φ между фиксированной полуплоскостью, проходящей через ось z (например, x_2Ox_3), и полуплоскостью, проведенной через ось z и рассматриваемую точку. В каждой точке базисы e_R, e_φ, e_z, хотя и различны, но взаимно ортогональны. Это — ортогональная система криволинейных координат. В обобщенной цилиндрической системе координат (не ортогональной) вместо окружностей радиуса R берутся эллипсы $u^2 = (x_1 : a)^2 + (x_2 : b)^2$;

б) сферическая система координат — положение точки M определяется расстоянием R от фиксированной точки углом θ между фиксированной осью z ($= x_3$) и радиусом-вектором R_M и углом φ между фиксированной полуплоскостью (например, x_2Ox_3) и полуплоскостью, проведенной через ось z и рассматриваемую точку. В каждой точке базисы e_R, e_θ, e_φ хотя и различны, но взаимно ортогональны — это ортогональная криволинейная система координат

Подробно криволинейные координаты рассмотрены в специальном разделе второй главы.

Подчеркнем еще раз, что при решении конкретных задач обычно пользуются ортогональными системами координат. Однако многие свойства их становятся значительно яснее, если рассматривать их как предельный случай обобщенных криволинейных координат, базис которых не прямоугольный, а координатные линии не прямые линии. Поэтому в дальнейшем основные свойства векторов (тензоров) будут рассматриваться главным образом в декартовой прямоугольной системе координат, хотя в некоторых местах будут применены неортогональные базисы.

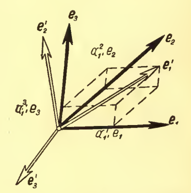


Рис. 1.10. Разложение вектора e'_1 по векторам e_1, e_2, e_3

Прямое и обратное преобразование векторов двух произвольных базисов с общим началом. Пусть в некоторой точке O выбраны два векторных базиса (e_1, e_2, e_3) и (e'_1, e'_2, e'_3). Любой из векторов первого базиса можно разложить по векторам второго базиса и наоборот (рис. 1.10).

Обозначим через $\alpha^1_{i'}$, $\alpha^2_{i'}$, $\alpha^3_{i'}$ (цифры вверху — индексы) коэффициенты разложения вектора e'_i по векторам базиса e_1, e_2, e_3, будем называть эти девять $(i = 1, 2, 3)$ величин *коэффициентами прямого преобразования*, так что в соответствии с (1.3)

$$\left.\begin{aligned} e'_1 &= \alpha^1_{1'} e_1 + \alpha^2_{1'} e_2 + \alpha^3_{1'} e_3 = \sum_{k=1}^{3} \alpha^k_{1'} e_k, \\ e'_2 &= \alpha^1_{2'} e_1 + \alpha^2_{2'} e_2 + \alpha^3_{2'} e_3 = \sum_{k=1}^{3} \alpha^k_{2'} e_k, \\ e'_3 &= \alpha^1_{3'} e_1 + \alpha^2_{3'} e_2 + \alpha^3_{3'} e_3 = \sum_{k=1}^{3} \alpha^k_{3'} e_k \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

или, в общем виде,

$$e'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha^k_{i'} e_k.$$

Аналогично, коэффициенты разложения вектора e_j по векторам e'_1, e'_2, e'_3 обозначим через $\alpha^{1'}_j$, $\alpha^{2'}_j$, $\alpha^{3'}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ и эти девять величин будем называть *коэффициентами обратного преобразования*

$$e_j = \sum_{k=1}^{3} \alpha^{k'}_j e'_k. \tag{1.5}$$

Между коэффициентами прямого и обратного преобразований существует связь. Подставив разложение каждого вектора e_k из (1.5) в (1.4), после перегруппировки слагаемых найдем

$$\begin{aligned} e'_i &= \alpha^1_{i'} e_1 + \alpha^2_{i'} e_2 + \alpha^3_{i'} e_3 = \alpha^1_{i'} (\alpha^{1'}_1 e'_1 + \alpha^{2'}_1 e'_2 + \alpha^{3'}_1 e'_3) + \\ &+ \alpha^2_{i'} (\alpha^{1'}_2 e'_1 + \ldots) + \alpha^3_{i'} (\alpha^{1'}_3 e'_1 + \ldots) = \\ &= (\alpha^1_{i'} \alpha^{1'}_1 + \alpha^2_{i'} \alpha^{1'}_2 + \alpha^3_{i'} \alpha^{1'}_3) e'_1 + (\alpha^1_{i'} \alpha^{2'}_1 + \ldots) e'_2 + \\ &+ (\alpha^1_{i'} \alpha^{3'}_1 + \ldots) e'_3 = e'_1 \sum_{l=1}^{3} \alpha^l_{i'} \alpha^{1'}_l + e'_2 \sum_{l=1}^{3} \alpha^l_{i'} \alpha^{2'}_l + \\ &+ e'_3 \sum_{l=1}^{3} \alpha^l_{i'} \alpha^{3'}_l = \sum_{k=1}^{3} e'_k \sum_{l=1}^{3} \alpha^l_{i'} \alpha^{k'}_l. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Аналогичным путем можно найти

$$e_i = e_1 \sum_{l=1}^{3} \alpha_i^{l'} \alpha_{l'}^1 + e_2 \sum_{l=1}^{3} \alpha_i^{l'} \alpha_{l'}^2 + e_3 \sum_{l=1}^{3} \alpha_i^{l'} \alpha_{l'}^3 =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} e_k \sum_{l=1}^{3} \alpha_i^{l'} \alpha_{l'}^k. \qquad (1.6)$$

Отсюда ясно, что для каждого значения индекса i ($i = 1, 2, 3$) имеет место следующие 18 соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{i'}^{l} \alpha_{l}^{j'} &= \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases} \\ \sum_{l=1}^{3} \alpha_i^{l'} \alpha_{l'}^{j} &= \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

Эти соотношения будут использованы в дальнейшем.

Заметим, что все они могут быть найдены решением вышеприведенной системы линейных алгебраических уравнений.

1.4. Скалярное и векторное произведение двух векторов

Скалярное произведение. *Скалярным произведением* $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ *двух векторов* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *называется произведение их модулей на косинус угла между векторами.*

Таким образом,

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB \cos(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}).$$

Отсюда также следует, что скалярное произведение равно произведению модуля одного вектора и проекции другого вектора на направление первого (рис. 1.5), т. е.

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_B B = AB_A\,.$$

Скалярное произведение векторов обладает коммутативностью и дистрибутивностью:

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ (коммутативность),

$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$ (дистрибутивность) (рис. 1.11).

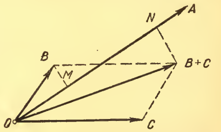


Рис. 1.11. Дистрибутивность скалярного произведения. Поскольку $ON = OM + MN$, то $|A|\,ON = |A|\,OM + |A|\,MN$, т. е. $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$

Необходимое и достаточное условие перпендикуляр-

ности двух векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ выражается следующим равенством

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0.$$

Необходимость и достаточность этого условия очевидна (если $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$, то $\cos(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=0$, если один вектор есть нуль, то ему можно приписать направление, перпендикулярное ко второму вектору).

Проекция вектора на ось равна скалярному произведению орта оси на вектор:

$$A_u=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}_0=A\cos(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{u}_0).$$

Это следует из определения проекции вектора на ось.

Если (x_1), (x_2), (x_3) — оси прямоугольной декартовой системы координат, то любой вектор $\boldsymbol{A}$ может быть разложен по ортам $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ этих осей, и можно написать (см. формулу 1.2):

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}_1+A_2\boldsymbol{i}_2+A_3\boldsymbol{i}_3.$$

В силу взаимной перпендикулярности координатных осей имеем:

$$\boldsymbol{i}_l\cdot\boldsymbol{i}_k=\begin{cases}0, & \text{если } l\neq k,\\ 1, & \text{если } l=k.\end{cases} \qquad (1.8)$$

Тогда

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_1=A_1;\quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_2=A_2;\quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_3=A_3.$$

Таким образом, A_1, A_2, A_3 суть проекции вектора $\boldsymbol{A}$ на координатные оси.

Итак, любой вектор $\boldsymbol{A}$ может быть записан в виде

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_1)\,\boldsymbol{i}_1+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_2)\,\boldsymbol{i}_2+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_3)\,\boldsymbol{i}_3. \qquad (1.9)$$

Скалярное произведение векторов может быть записано через произведения проекций этих векторов на оси прямоугольной декартовой системы координат:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(A_1\boldsymbol{i}_1+A_2\boldsymbol{i}_2+A_3\boldsymbol{i}_3)\cdot(B_1\boldsymbol{i}_1+B_2\boldsymbol{i}_2+B_3\boldsymbol{i}_3)=$$
$$=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3. \qquad (1.10)$$

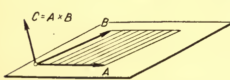


Рис. 1.12. Векторное произведение

Здесь использованы свойства дистрибутивности скалярного произведения, формула (1.9) разложения вектора по осям декартовой системы и условия (1.8).

Векторное произведение. *Векторным произведением* $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ *двух векторов называется вектор* $\boldsymbol{C}\equiv\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ (рис. 1.12), *направленный перпендикулярно плоскости векторов-сомножителей в ту сторону, откуда поворот от первого сомножителя ко второму*

на меньший угол виден против хода часовой стрелки, и равный по величине площади параллелограмма, построенного на этих векторах, т. е.

$$|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = AB \sin(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}). \qquad (1.11)$$

Таким образом, направление векторного произведения соответствует движению правого винта при его вращении от $\boldsymbol{A}$ к $\boldsymbol{B}$.

В отличие от скалярного произведения векторное произведение не обладает коммутативностью, именно:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A},$$

но, как и скалярное произведение, удовлетворяет закону дистрибутивности, т. е. (рис. 1.13)

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}.$$

Необходимое и достаточное условие параллельности двух векторов A и B имеет вид

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0.$$

Необходимость этого условия следует из того, что $\sin(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = 0$, если $\boldsymbol{A} \parallel \boldsymbol{B}$, а при установлении достаточности следует помнить, что вектору, равному нулю, можно приписать любое направление.

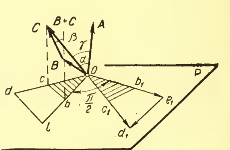


Рис. 1.13. Дистрибутивность векторного произведения

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}.$$

Спроектируем векторы $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ на плоскость $\boldsymbol{P}$, перпендикулярную к $\boldsymbol{A}$. Стороны полученного треугольника Ocb увеличим в $|\boldsymbol{A}|$ раз и повернем полученный треугольник Ocb на угол $\pi : 2$ так, чтобы направление поворота и направление $\boldsymbol{A}$ составляли правый винт, до положения Od_1e_1. Введем векторы Od_1, Oe_1, e_1d_1. Из того, что $Od_1 = \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$, $e_1d_1 = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}$, $Oe_1 = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, $Od_1 = Oe_1 + e_1d_1$, следует дистрибутивность векторного произведения

Если принять вышеприведенное определение векторного произведения, то для ортов $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ правой системы координат, в которой оси расположены, как показано на рис. 1.14, *а*, имеем

$$\boldsymbol{i}_1 \times \boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{i}_3, \quad \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{i}_1, \quad \boldsymbol{i}_3 \times \boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{i}_2;$$
$$\boldsymbol{i}_1 \times \boldsymbol{i}_1 = \boldsymbol{i}_2 \times \boldsymbol{i}_2 = \boldsymbol{i}_3 \times \boldsymbol{i}_3 = 0,$$

или короче:

$$\boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{i}_l = \boldsymbol{i}_m; \quad \boldsymbol{i}_n \times \boldsymbol{i}_n = 0, \qquad (1.12)$$

где индексы k, l, m составляют циклическую* (четную) перестановку чисел 1, 2, 3.

* Циклические перестановки чисел 1, 2, 3 суть: 123, 231, 312.

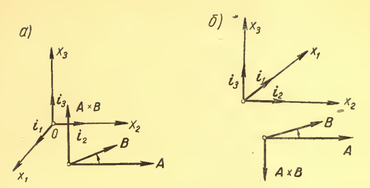


Рис. 1.14. Векторное произведение в правой и левой системах координат

Можно было бы иначе определить направление векторного произведения — противоположно вышеприведенному, т. е. по движению не правого, а левого винта при вращении от $\boldsymbol{A}$ к $\boldsymbol{B}$. Тогда формулы (1.12) имели бы место в левой системе координат, в которой оси расположены так, как показано на рис. 1.14, *б*. При этом векторное произведение имело бы направление, противоположное тому, которое определено для правой системы координат (рис. 1. 14, *а*).

Такие векторы, направление которых устанавливается соглашением и которые в силу этого изменяют свое направление при замене правой системы координат на левую, называются ***аксиальными*** (момент силы, угловая скорость и т. п.). Векторы, направление которых определяется только физическим смыслом (сила, скорость и т. п.) и которые в силу этого не меняют своего направления при изменении системы координат, называются ***полярными***.

Для определения природы вектора можно представить отражение его в зеркале, перпендикулярном к нему. Если отражение сохраняет направление величины, описывающей явление, то вектор аксиальный (рис. 1.15).

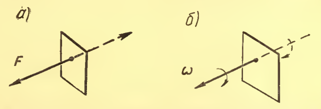


Рис. 1.15. а) Сила — полярный вектор. Направление ее действия изменяется на противоположное при отражении в зеркале. б) Угловая скорость—аксиальный вектор; вращение сохраняет свое направление при отражении в зеркале.

Более подробно об аксиальных векторах (псевдовекторах) и подобных им величинах будет сказано в главе 3.

В дальнейшем всюду мы будем пользоваться только правой системой координат.

Выразим проекции векторного произведения через проекции сомножителей:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_1\boldsymbol{i}_1 + A_2\boldsymbol{i}_2 + A_3\boldsymbol{i}_3) \times (B_1\boldsymbol{i}_1 + B_2\boldsymbol{i}_2 + B_3\boldsymbol{i}_3) =$$
$$= \boldsymbol{i}_1 (A_2B_3 - A_3B_2) + \boldsymbol{i}_2 (A_3B_1 - A_1B_3) + \boldsymbol{i}_3 (A_1B_2 - A_2B_1).$$

Таким образом,

$$C_1 = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_1 = A_2B_3 - A_3B_2;$$
$$C_2 = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_2 = A_3B_1 - A_1B_3;$$
$$C_3 = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_3 = A_1B_2 - A_2B_1,$$

или, короче,

$$C_i = A_kB_l - A_lB_k, \qquad (1.13)$$

где (i, k, l) составляют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3.

Отметим удобную запись векторного произведения в виде определителя, которая следует из (1.13):

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.14)$$

Векторное и скалярное произведения тесно связаны со многими физическими понятиями.

Работа силы, приложенной к точке, измеряется произведением величины перемещения точки и проекции силы на направление перемещения. Сила, перпендикулярная к перемещению, как говорят, «работы не совершает». В связи с этим, если $\boldsymbol{F}$ — сила, а $\boldsymbol{s}$ — перемещение, работа A силы по определению равна

$$A = F_s s = Fs \cos(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}.$$

Если сила и перемещение составляют тупой угол (силы сопротивления), то их работе приписывают знак минус, что полностью согласуется с определением работы как скалярного произведения.

Простейшим физическим образом векторного произведения является момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно некоторой точки O:

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F},$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор, проведенный из точки O к началу вектора $\boldsymbol{F}$.

Направление вектора $\boldsymbol{M}_0$ выбирается условно, точно так же, как и направление вектора угловой скорости вращения, вызываемого этим моментом силы. Положительное направление определяется в зависимости от выбора системы координат.

Если $\boldsymbol{E}$ напряжение электрического поля в точке, где расположен электрический заряд e, то сила, действующая на этот заряд, равна $\boldsymbol{F}_э = e\boldsymbol{E}$. На электрический заряд e, движущийся со скоростью $\boldsymbol{v}$ в магнитном поле, напряжение которого в точке, где расположен заряд, равно $\boldsymbol{H}$, действует

сила $F_м = \frac{e}{c}(v \times H)$. Таким образом, полная сила действия электромагнитного поля на заряд

$$F = eE + \frac{e}{c}(v \times H).$$

Если за время dt заряд перемещается на расстояние dr, то работа электромагнитного поля будет

$$F \cdot dr = F \cdot \frac{dr}{dt} dt = F \cdot v dt = \left[eE + \frac{e}{c}(v \times H) \right] \cdot v dt.$$

Работа эта идет на изменение кинетической энергии U заряда. Так как сила $F_м$ магнитного поля в каждый момент перпендикулярна к скорости v, то работа магнитного поля равна нулю и вся работа электромагнитного поля определяется работой только электрического поля, равной за единицу времени

$$\frac{dU}{dt} = eE \cdot v.$$

Магнитное поле, не изменяя величины скорости, изменяет только направление движения электрического заряда.

1.5. Произведения трех векторов

Здесь мы отметим два типа произведений.

Векторно-скалярное произведение $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$. В силу определения скалярного произведения можно записать:

$$V \equiv (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| C_{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}} = |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| h.$$

Здесь $C_{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}} = h$ — проекция вектора $\boldsymbol{C}$ на направление вектора $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ (рис. 1.16) — является высотой параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$. Поскольку $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$ — площадь основания этого параллелепипеда, то векторно-скалярное произведение представляет собой объем параллелепипеда со знаком (+) или (—) в зависимости от того, будет ли острым или тупым угол между векторами $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$.

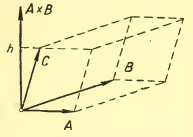


Рис. 1.16. Векторно-скалярное произведение трех векторов

Используя представления (1.10) и (1.14), получим удобную запись векторно-скалярного произведения через проекции сомножителей на оси прямоугольной декартовой системы координат.

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \cdot (C_1 \boldsymbol{i}_1 + C_2 \boldsymbol{i}_2 + C_3 \boldsymbol{i}_3) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \quad (1.15)$$

Отсюда вытекает важное следствие о неизменяемости значения векторно-скалярного произведения при циклической перестановке его векторов:

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}. \tag{1.16}$$

Если два вектора в векторно-скалярном произведении одинаковы (или параллельны), то это произведение равно нулю.

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=0.$$

Если три вектора $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ лежат в одной плоскости (компланарны), то объем параллелепипеда, построенного на них, равен нулю.

Отсюда необходимое и, как нетрудно видеть, достаточное условие компланарности векторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ можно записать в виде:

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=0. \tag{1.17}$$

Итак, если $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq 0$, то векторы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ образуют базис. При этом, по определению, *если* $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})>0$, *то базис* ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$) *называется правым, если* $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})<0$, *то базис называется левым.*

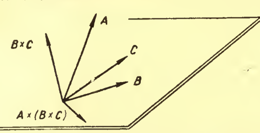


Рис. 1.17. Двойное векторное произведение трех векторов

Тройка ортов правой системы декартовых координат образует правый базис, а тройка ортов левой системы — левый.

Двойное векторное произведение $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$. Это произведение трех векторов представляет собой вектор, который лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ и перпендикулярен к $\boldsymbol{A}$.

Поскольку векторы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ неколлинеарны, то на основании (1.1) существует единственное представление вида

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}. \tag{1.18}$$

Определим скалярные множители m и n.

Обозначим

$$E \equiv A \times (B \times C);$$
$$D \equiv (B \times C).$$

Вычислим проекции E_1, E_2, E_3 вектора E на оси прямоугольной декартовой системы координат, введенной произвольно.

Согласно (1.13) получим

$$E_1 = A_2 D_3 - A_3 D_2.$$

Но в свою очередь имеем:

$$D_2 = (B \times C)_2 = C_1 B_3 - B_1 C_3;$$
$$D_3 = (B \times C)_3 = B_1 C_2 - C_1 B_2.$$

Таким образом,

$$E_1 = A_2 (B_1 C_2 - C_1 B_2) - A_3 (C_1 B_3 - B_1 C_3) = \\ = B_1 (A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_1 (A_2 B_2 + A_3 B_3).$$

Добавляя и вычитая справа величину $A_1 B_1 C_1$, получим, учитывая (1.10),

$$E_1 = B_1 (A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_1 (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) = \\ = B_1 (A \cdot C) - C_1 (A \cdot B).$$

Аналогично получим:

$$E_2 = B_2 (A \cdot C) - C_2 (A \cdot B);$$
$$E_3 = B_3 (A \cdot C) - C_3 (A \cdot B).$$

Следовательно, $m = A \cdot C$ и $n = - A \cdot B$.

Таким образом, окончательно получаем формулу

$$A \times (B \times C) = B (A \cdot C) - C (A \cdot B). \qquad (1.19)$$

Как следствие, отсюда можно получить

$$(A \times B) \times C = B (A \cdot C) - A (B \cdot C). \qquad (1.20)$$

Формула (1.19) может быть получена и без введения координатной системы (см., например, Н. Е. Кочин. «Векторное исчисление и начала тензорного исчисления»).

Замечание о «делении» векторов. Решение уравнений обычно связано с действием деления, которое в векторном исчислении определяется неоднозначно. Действительно, определяя деление как действие, обратное умножению, прежде всего нужно рассматривать его отдельно для каждого из приведенных типов произведений. Но даже в простей-

шем случае скалярного произведения уравнение, определяющее неизвестный вектор $\boldsymbol{X}$,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{X}=m \quad (\boldsymbol{a}\neq 0),$$

имеет бесчисленное множество решений.

Аналитически это уравнение определяет только одну проекцию неизвестного вектора $\boldsymbol{X}$ на направление вектора $\boldsymbol{a}$ (рис. 1.18). Поэтому в векторном исчислении предпочитают вовсе отказаться от операции деления на вектор.

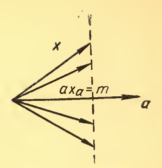


Рис 1.18. Уравнение $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=ax_a=m$.
Это уравнение определяет только проекцию неизвестного вектора $\boldsymbol{x}$ на заданный вектор $\boldsymbol{a}$

1.6. Взаимные базисы векторов. Ковариантные и контравариантные составляющие вектора. Сокращенные обозначения

Взаимные базисы векторов. Определение проекции некоторого вектора $\boldsymbol{A}$ на оси прямоугольной системы координат с ортами $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ сводится к определению скалярных произведений $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_3$. Эти скаляры определяют разложение заданного вектора по трем заданным взаимно перпендикулярным направлениям, определяемым векторами $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, если положить $\boldsymbol{i}_1=\boldsymbol{a}_1:a_1$; $\boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{a}_2:a_2$; $\boldsymbol{i}_3=\boldsymbol{a}_3:a_3$, после чего

$$A=\sum_{k=1}^{3}\left(A\cdot\frac{a_k}{a_k^2}\right)a_k. \tag{1.21}$$

Задача разложения заданного вектора $\boldsymbol{B}$ по трем произвольным некомпланарным векторам $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ сводится к определению трех неизвестных B^1, B^2, B^3 (числа 1, 2, 3 — индексы, а не степени*) из системы трех скалярных уравнений, получаемых проектированием выражения $\boldsymbol{B}=B^1\boldsymbol{b}_1+B^2\boldsymbol{b}_2+B^3\boldsymbol{b}_3$ на оси какой-либо системы координат.

Прямой путь решения этой важной задачи — использование взаимных базисов векторов.

Два базиса ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) и ($\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$)* называются взаимными (биортогональными), если их векторы удовлетворяют соотношению

$$\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_k=\begin{cases}0, & \text{если } i\neq k;\\ 1, & \text{если } i=k.\end{cases} \tag{1.22}$$

---

* Верхний индекс в обозначениях координат, а впоследствии и векторов $\boldsymbol{e}^k$ не означает показателя степени. Удобство такого обозначения станет ясным позже, при рассмотрении контравариантных составляющих вектора.

Подчеркнем, что e_k расположены друг к другу под произвольными углами (косоугольная система координат) и модули их могут отличаться от единицы.

Из этого определения видно, что каждый вектор одного базиса перпендикулярен к двум векторам взаимного базиса а с третьим вектором, индекс которого имеет то же чис, ленное значение, составляет острый угол*.

Таким образом, если на двух взаимных базисах построить параллелепипеды с объемами $|V| = |e_1 \cdot (e_2 \times e_3)|$ и $|V'| = |e^1 \cdot (e^2 \times e^3)|$, то ребра одного из них будут перпендикулярны граням другого, и наоборот.

Условие $e_3 \cdot e^3 = 1$, например, означает, что

$$|e^3| = \frac{1}{|e_3| \cos(e^3, e_3)} = \frac{1}{h} \qquad (1.23)$$

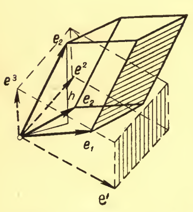


Рис. 1.19. Взаимные системы и их параллелепипеды

(рис. 1.19), т. е. модули векторов одного базиса равны обратным значениям параллельных им высот параллелепипеда взаимного базиса.

Рассмотрим построение базиса, взаимного данному.

Пусть дан базис (e_1, e_2, e_3). Вектор e^1 взаимного базиса должен быть перпендикулярен к векторам e_2 и e_3, т. е.

$$e^1 = m(e_2 \times e_3).$$

Скаляр m определяется из условия

$$e_1 \cdot e^1 = 1,$$

т. е.

$$me_1 \cdot (e_2 \times e_3) = 1.$$

Поскольку $e_1 \cdot (e_2 \times e_3) \neq 0$ (векторы e_1, e_2, e_3 составляют базис), получим

$$e^1 = \frac{e_2 \times e_3}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} = \frac{e_2 \times e_3}{V} .$$

Здесь $|V|$ — объем параллелепипеда, построенного на векторах базиса (e_1, e_2, e_3).

Аналогично строятся векторы e^2 и e^3,

$$e^2 = \frac{e_3 \times e_1}{V}; \quad e^3 = \frac{e_1 \times e_2}{V} .$$

* Например, так как $|e_1| \cdot |e^1| \cos(e_1, e^1) = 1$, то $\cos(e_1, e^1) > 0$ и, следовательно, угол между e_1 и e^1 — острый.

Эти соотношения можно записать короче:

$$e^i = \frac{e_j \times e_k}{e_l \cdot (e_m \times e_n)}, \tag{1.24}$$

где (i, j, k) и (l, m, n) составляют циклические перестановки чисел (1, 2, 3).

Полученные формулы дают выражения для векторов e^1, e^2, e^3 через векторы e_1, e_2, e_3. Аналогично можно получить выражения векторов первого базиса через векторы второго:

$$e_1 = \frac{e^2 \times e^3}{e^1 \cdot (e^2 \times e^3)} = \frac{e^2 \times e^3}{V'},$$

$$e_2 = \frac{e^3 \times e^1}{V'},$$

$$e_3 = \frac{e^1 \times e^2}{V'},$$

где $|V'|$ — объем параллелепипеда, построенного на векторах базиса (e^1, e^2, e^3).

Сокращенная запись этих соотношений имеет вид

$$e_l = \frac{e^j \times e^k}{e^l \cdot (e^m \times e^n)}. \tag{1.25}$$

Отметим два важных свойства взаимных базисов:

1) Если e_1, e_2, e_3 — орты прямоугольной системы координат, то взаимный к нему базис (e^1, e^2, e^3) совпадает с основным, т. е.

$$e_1 = e^1 = i_1;\ e_2 = e^2 = i_2;\ e_3 = e^3 = i_3.$$

Доказательство следует из свойств (1.8) и (1.12) ортов прямоугольной системы координат.

2) Взаимные базисы либо оба правые, либо оба левые. Это следует из того, что $V, V' = 1$ (доказательство этого утверждения представляется читателю). Таким образом, если $V' > 0$, то $V, > 0$.

Для определения B^k из векторного уравнения

$$B = B^1 b_1 + B^2 b_2 + B^3 b_3 = \sum_{k=1}^{3} B^k b_k, \tag{1.26}$$

где b_1, b_2, b_3 — некомпланарные векторы, умножим скалярно B на b^i — вектор взаимного базиса.

Тогда

$$B \cdot b^l = \sum_{k=1}^{3} B^k b_k \cdot b^l = B^l. \tag{1.27}$$

Это и есть искомое решение. Так, например,

$$B^1 = B\cdot b^1 = \frac{B\cdot(b_2\times b_3)}{b_1\cdot(b_2\times b_3)}. \qquad (1.28)$$

Таким образом, разложение вектора по базису (b_1, b_2, b_3) выражается через проекции (с точностью до постоянного множителя) вектора на взаимный базис, т. е.

$$B = \sum_{k=1}^{3}(B\cdot b^k)\, b_k.$$

Используя построение взаимного базиса, можно легко решить задачу об определении вектора A, удовлетворяющего трем уравнениям

$$A\cdot a_1 = m_1;\quad A\cdot a_2 = m_2;\quad A\cdot a_3 = m_3, \qquad (*)$$

где a_1, a_2, a_3 — некомпланарные векторы, m_1, m_2, m_3 — скаляры.

Единственное решение этой задачи имеет вид

$$A = m_1a^1 + m_2a^2 + m_3a^3.$$

Нетрудно проверить, что это решение удовлетворяет заданной системе. Если A' — второе решение, т. е.

$$A'\cdot a_1 = m_1;\quad A'\cdot a_2 = m_2;\quad A'\cdot a_3 = m_3, \qquad (**)$$

то, вычитая из каждого уравнения системы (*) соответствующее уравнение системы (**), получим

$$(A - A')\cdot a_1 = (A - A')\cdot a_2 = (A - A')\cdot a_3 = 0.$$

Вектор $A - A'$, перпендикулярный всем векторам базиса a_1, a_2, a_3, может быть только нулем, т. е. $A = A'$, и найденное решение единственно.

Сокращенные обозначения. В современной физической и математической литературе принято считать:

1. Каждый буквенный индекс, встречающийся в выражении один раз, может принимать значения 1, 2, 3.

При этом, поскольку для обозначения координатных осей выбраны буквы с индексами (например, x_1, x_2, x_3 или x^1, x^2, x^3), под записью A_i, например, будем понимать совокупность трех величин A_1, A_2, A_3; запись A_{ik} означает совокупность $3^2 = 9$ величин: A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}; запись A^{ik} — совокупность девяти величин: A^{11}, $A^{12}, \ldots, A^{33}$.

2. По дважды повторяющемуся в одночлене индексу подразумевается суммирование от 1 до 3.

Таким образом, например, выражения A_{ii}, A_iB^i, $A_iB^kC^i$ означают

$$A_{ii} = \sum_{i=1}^{3} A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$

$$A_iB^i = \sum_{i=1}^{3} A_iB^i = A_1B^1 + A_2B^2 + A_3B^3,$$

$$A_l B^k C^l = B^k \sum_{l=1}^{3} A_l C^l = B^k (A_1 C^1 + A_2 C^2 + A_3 C^3).$$

Равенства (1.4) и (1.5) можно поэтому записать в виде

$$e_l' = \alpha_{l'}^{k} e_k;$$

$$e_j = \alpha_j^{k'} e_k'.$$

Эти обозначения распространяются и на более сложные суммы, например равенства (1.6) можно записать в виде

$$e_i' = \alpha_{i'}^{l} \alpha_l^{k'} e_k'$$

$$e_i = \alpha_i^{l'} \alpha_{l'}^{k} e_k.$$

Индексы суммирования часто называются «немыми» в том смысле, что сумма, очевидно, не меняет значения, если заменить «немой» индекс другой буквой, т. е.

$$A_{ii} \equiv A_{kk} \equiv A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

и т. п.

Кроме этих общепринятых обозначений, условимся, что если имеются две системы координат (K) и (K'), то координаты какой-то точки в системе (K) будем обозначать через x_i (или x^i, если система (K) не является декартовой прямоугольной системой координат), а координаты *той же самой* точки в системе (K') будем обозначать через x_i' (или x'^i, если система (K') не является декартовой прямоугольной системой координат).

Аналогичных обозначений будем придерживаться и для компонент векторов (и тензоров, вообще).

Условность здесь заключается в том, что, например, A_1 и A_1' суть компоненты *одного и того же вектора* $\mathbf{A}$ по первой оси системы (K) и по первой оси системы (K') соответственно, а отнюдь не компоненты двух разных векторов в какой-то одной системе.

Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. При рассмотрении вопроса о взаимных базисах было показано, что один и тот же вектор (рис. 1.20) можно представить разложенным как по векторам основного базиса e_k

$$A = A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 = \sum_{k=1}^{3} A^k e_k = A^k e_k; \tag{1.29}$$

$$A^k = A \cdot e^k,$$

так и по векторам взаимного базиса

$$A = A_1 e^1 + A_2 e^2 + A_3 e^3 = \sum_{k=1}^{3} A_k e^k \equiv A_k e^k; \qquad (1.30)$$

$$A_k = A \cdot e_k$$

(последние записи равенств даны в сокращенных обозначениях).

Числа A^k называются *контравариантными*, а числа A_k *ковариантными* компонентами вектора A.

Читателю следует обратить внимание на рис. 1.20, где изображен вектор $\boldsymbol{A}$, лежащий в плоскости векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, и его ко- и контравариантные компоненты.

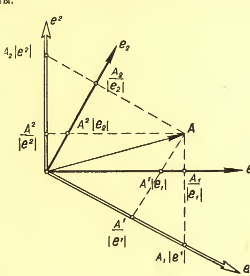


Рис. 1.20. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора на плоскости.

Ковариантные компоненты A_1, A_2 могут быть найдены либо по составляющим $A^1 e_1$, $A^2 \boldsymbol{e}_2$ вектора A по направлениям взаимного базиса, либо по проекциям $\frac{A_1}{|e_1|}$, $\frac{A_2}{|e_2|}$ вектора на оси основного базиса. Контравариантные компоненты A^1, A^2 можно найти из соствляющих $A^1 \boldsymbol{e}_1$, $A^2 \boldsymbol{e}_2$ по направлениям основного базиса, а также из проекций на оси взаимного базиса $\frac{A^1}{|e^1|}$, $\frac{A^2}{|e^2|}$

Названия компонент вектора связаны с тем, что *прямое* преобразование *ковариантных* компонент выполняется при помощи коэффициентов $\alpha_{i'}^{k}$ *прямого* преобразования т. е.

$$A'_i = \alpha_{i'}^{k} A_k, \qquad (1.31)$$

а *контравариантных* компонент — при помощи коэффициентов $\alpha_k^{i'}$ *обратного* преобразования, т. е.

$$A'^i = \alpha_k^{i'} A^k. \qquad (1.32)$$

Что касается обратного преобразования, то имеют место «обратные» формулы

$$A_i = \alpha_i^{k'} A'_k; \quad A^i = \alpha_{k'}^i A'^k. \qquad (1.33)$$

Действительно, пусть в системе координат, определяемой базисом (e_1, e_2, e_3), мы имеем ковариантные компоненты A_i и контравариантные A^i вектора $\boldsymbol{A}$.

Определим в другой координатной системе с базисом (e'_1, e'_2, e'_3) ковариантные компоненты A'_i (*того же вектора* $\boldsymbol{A}$!) через его компоненты A_i и контравариантные компоненты A'^i через A^i.

Заметим, прежде всего, что из (1.4) и (1.5) § 1.3 следуют выражения для коэффициентов прямого и обратного преобразования:

$$\alpha_{i'}^k = e'_i \cdot e^k; \quad \alpha_i^{k'} = e_i \cdot e'^k. \qquad (1.34)$$

Умножим обе части разложения $\boldsymbol{A} = A_k e^k$ скалярно на вектор e'_i. Получим $\boldsymbol{A} \cdot e'_i = A_k e'_i \cdot e^k$.

В силу (1.29) и (1.34) получаем закон преобразования (1.31).

Аналогично, умножая разложение $\boldsymbol{A} = A^k e_k$ скалярно на e'^i, в силу (1.30) и (1.34) получаем закон (1.32).

Читателю представляется самостоятельно получить формулы (1.33) обратного преобразования.

В связи с понятием контравариантных компонент вектора важно отметить, что *косоугольные декартовы* координаты точки следует писать с индексом вверху: x^1, x^2, x^3. Это становится ясным, если учесть, что эти координаты являются контравариантными компонентами радиуса-вектора этой точки (см. рис. 1.7) так, что

$$\boldsymbol{r} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \equiv x^k e_k.$$

Физические компоненты вектора. Следует отметить, с точки зрения физика и инженера, довольно существенный факт, что размерности компонент A^i и A_i одного и того же вектора $\boldsymbol{A} = A^i e_i = A_i e^i$ различны; они определяются размерностями базисных векторов и соотношением $e_i \cdot e^i = 1$.

Для определения операций векторы рассматриваются геометрически как направленные отрезки с длиной, пропорциональной величине вектора, и физическая размерность их не принимается во внимание (за исключением основного правила, что все векторы, входящие в уравнение слагаемыми, должны иметь одинаковую физическую размерность).

Можно, однако, ввести так называемые «физические» (иногда «фактические») компоненты вектора, размерности которых будут совпадать с размерностями рассматриваемого вектора. Для этого определим *векторный единичный базис* e_i^* и, соответственно, ему взаимный e^{i*} при помощи соотношений

$$e_i^* = \frac{e_i}{|e_i|}; \quad e^{*i} = e^i \, |e_i|, \qquad (1.35)$$

и тогда

$$\boldsymbol{A} = A^{*i} e_i^* = A_i^* e^{*i}. \qquad (1.36)$$

Связь физических компонент A^* с ко- и контравариантными компонентами найдется без труда:

$$A^{*i}=A^i\,|\,e_i\,|;\quad \overset{*}{A}_i=\frac{A_i}{|\,e_i\,|}\quad \text{(нет суммирования по } i). \tag{1.37}$$

Как видно (рис. 1.21), A^{*i} являются *компонентами* (параллельными проекциям) вектора A при разложении его по ортам e_i^* основного базиса, а $\overset{*}{A}_i$ — *проекции* (ортогональные) этого же вектора A на оси того же базиса.

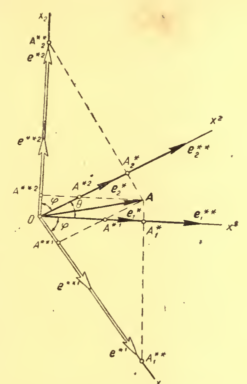


Рис. 1.21. «Физические» составляющие вектора

Можно за основу принять взаимный базис и определить единичный векторный базис соотношениями.

$$e^{**k}=\frac{e^k}{|\,e^k\,|};\quad e_k^{**}=e_k\,|\,e^k\,|.$$

Это дает

$$e^{**k}=e^{*k}\cos(e^k,\ e_k),\quad e_k^{**}=\frac{\overset{*}{e}_k}{\cos(e^k,e_k)}$$

и

$$A_k^{**} = \frac{A_k^*}{\cos(e^k, e_k)}; \quad A^{**k} = A^{*k} \cos(e^k, e_k),$$

т. е. оба определения равнозначны и все сводится к выбору масштаба для единицы.

Подчеркием, что все вычисления почти всегда производятся с обычными ко- и контравариантными компонентами и только в конце, если нужно, делается пересчет на физические компоненты.

Связь между ковариантными и контравариантными компонентами вектора. Выражение ковариантных компонент вектора через его контравариантные компоненты и наоборот можно получить, если разложения (1.29) умножить скалярно на e_i, а (1.30) умножить на e^i

$$\left.\begin{aligned} A\cdot e_i &= A^k (e_k\cdot e_i),\\ A\cdot e^i &= A_k (e^k\cdot e^i).\end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} e_k\cdot e_i &= g_{ik} = g_{ki},\\ e^k\cdot e^i &= g^{ik} = g^{ki},\\ e^k\cdot e_i = g_i^k \equiv \delta_i^k &= \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k;\\ 1, & \text{если } i = k.\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{1.39}$$

Тогда из (1.38) следуют формулы

$$A_i = g_{ik}A^k, \tag{1.40}$$

$$A^i = g^{ik}A_k, \tag{1.41}$$

которые и дают искомые выражения.

Девять величин g_{ik} (и соответственно, g^{ik} и $g_i^k \equiv \delta_i^k$), как в дальнейшем будет показано, составляют тензор второго ранга — так называемый *метрический тензор*. Здесь мы рассмотрим некоторые свойства этих величин, ибо они являются основной характеристикой пространства, арифметизированного введенной системой координат с базисом (e_1, e_2, e_3).

Рассмотрим квадрат длины дуги Δs между двумя бесконечно близкими точками x^i и $x^i + \Delta x^i$ в системе координат с базисом (e_1, e_2, e_3).

Получим

$$\Delta s^2 = |\Delta r|^2 = \Delta r\cdot\Delta r = e_i\Delta x^i\cdot e_k\Delta x^k = e_i\Delta x^i\cdot e^k\Delta x_k = e^i\Delta x_i\cdot e^k\Delta x_k.$$

Используя обозначения (1.39), имеем:

$$\left.\begin{aligned} \Delta s^2 &= g_{ik}\,\Delta x^i\Delta x^k,\\ \Delta s^2 &= g^{ik}\,\Delta x_i\Delta x_k,\\ \Delta s^2 &= \Delta x_i\Delta x^i,\end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

где Δx_i — ковариантные, а Δx^i — контравариантные компоненты вектора Δr.

Формулы (1.42) определяют квадрат элементарной дуги в выбранной системе координат через g_{ik} (или g^{ik}). Говорят, что величины g_{ik} (или g^{ik}) определяют *метрику пространства*, арифметические свойства которого устанавливаются введенной системой координат x^1, x^2, x^3.

Связь между величинами g_{ik} и g^{ik} можно установить, если рассмотреть выражения

$$A_i = g_{ik}A^k \quad (i = 1, 2, 3)$$

как систему трех линейных уравнений относительно A^1, A^2, A^3. Решение этой системы имеет вид

$$A^i = \frac{\sum_{k=1}^{3} G^{ik} A_k}{G} \equiv \frac{G^{ik} A_k}{G}, \tag{1.43}$$

где

$$G = \det g_{ik} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix};$$

G^{ik} — алгебраическое дополнение, соответствующее члену g_{ik} детерминанта G, может быть записано в виде

$$G^{ik} = \begin{vmatrix} g_{ps} & g_{pt} \\ g_{rs} & g_{rt} \end{vmatrix},$$

где индексы (i, p, r) и (k, s, t) составляют циклическую перестановку чисел (1, 2, 3). Таким образом, например, имеем

$$G^{11} = \begin{vmatrix} g_{22} & g_{32} \\ g_{23} & g_{33} \end{vmatrix}; \quad G^{12} = \begin{vmatrix} g_{23} & g_{33} \\ g_{21} & g_{31} \end{vmatrix}; \quad G^{13} = \begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}.$$

Сравнивая теперь (1.43) с (1.41), получим искомую связь

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{G}. \tag{1.44}$$

Аналогичным путем можно получить выражение

$$g_{ik} = \frac{G_{ik}}{G'}, \tag{1.45}$$

где

$$G' = \det g^{ik}; \quad G_{ik} = \begin{vmatrix} g^{ps} & g^{pt} \\ g^{rs} & g^{rt} \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, непосредственным вычислением, учитывая (1.39) и (1.24), получим

$$g^{ik} = e^i \cdot e^k = \frac{1}{V_r^2} (e_p \times e_r) \cdot (e_s \times e_t) = \frac{1}{V_r^2} \begin{vmatrix} e_p \cdot e_s & e_p \cdot e_t \\ e_r \cdot e_s & e_r \cdot e_t \end{vmatrix} = \frac{1}{V_r^2} \begin{vmatrix} g_{ps} & g_{pt} \\ g_{rs} & g_{rt} \end{vmatrix}.$$

Здесь использовано свойство (1.15) векторно-скалярного произведения и выражение (1.19) для двойного векторного произведения.

Сравнивая это выражение для g^{ik} с (1.40), получим

$$G = V_r^2 \quad V_r = \pm \sqrt{G}. \tag{1.46}$$

В соответствии с принятыми определениями (см. § 1.5), знак у корня в случае правой системы выбирается положительным.

Поскольку аналогичным путем можно получить

$$V' = \pm \sqrt{G'}, \tag{1.47}$$

то учитывая $V_r \cdot V' = 1$, получим, как следствие,

$$G \cdot G' = 1. \tag{1.48}$$

Таким образом, объем параллелепипеда, построенного на векторах основного базиса, равен $\sqrt{G}$, а на векторах взаимного базиса — равен $\sqrt{G'}$.

Случай ортогональных базисов. Случай ортогональных базисов рассмотрим особо, поскольку ортогональные системы координат наиболее распространены в приложениях.

Как уже было отмечено, ортогональный базис совпадает со своим взаимным. В этом случае из величин g_{ik}, согласно (1.39), отличны от нуля только g_{11}, g_{22}, g_{33}.

Тогда из (1.40) и (1.41) следует

$$\left.\begin{aligned} A_1 = g_{11}A^1;\ A_2 = g_{22}A^2;\ A_3 = g_{33}A^3 \\ A^1 = g^{11}A_1;\ A^2 = g^{22}A_2;\ A^3 = g^{33}A_3 \end{aligned}\right\}. \tag{1.49}$$

Следовательно,

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}};\quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}};\quad g_{33} = \frac{1}{g^{33}} \tag{1.50}$$

и, кроме того, имеем

$$\Delta s^2 = g_{11}(\Delta x^1)^2 + g_{22}(\Delta x^2)^2 + g_{33}(\Delta x^3)^2. \tag{1.51}$$

Коэффициенты

$$H_i = \sqrt{g_{ii}}\ \text{(не суммируется по } i\text{)} \tag{1.52}$$

носят название *коэффициентов Лямэ*.

В случае ортогональных координат физические компоненты A^{*i} и A_i^* совпадают.

Замечание по поводу «верхних» и «нижних» индексов. В связи с введенными обозначениями существует правило, носящее в некоторой степени мнемонический характер, которое может служить для контроля написания формул. Это правило гласит: *суммирование может производиться только по разноименным (верхний и нижний) «немым» индексам.*

Например, формулы A_iB^i, $g^{ik}A_k$ и т. п. означают правильно написанные суммы. Но выражения $A^k B^k$; $g^{ik} A^k$ не имеют смысла как суммы.

В связи с этим, о выражении $A^i = g^{ik}A_k$ иногда говорят как об операции «поднятия индекса», а о выражении $A_i = g_{ik}A^k$ — как об операции «опускания индекса» (оператор — совокупность 9 коэффициентов g_{ik} или g^{ik}).

Эти замечания полезно иметь в виду и в дальнейшем, особенно при алгебраических действиях с тензорами.

1.7. Переменные векторы

Вектор-функция скалярного аргумента. Векторы, так же как и скаляры, могут изменяться в пространстве от точки к точке и с течением времени:

$$A = A(r,\ t).$$

Здесь рассматриваются векторы, зависящие только от одной скалярной величины — *вектор-функции скалярного аргумента.* Ее определение строится аналогично определению скалярной функции скалярного аргумента.

Если каждому допустимому численному значению скалярной величины t соответствует одно вполне определенное

значение вектора $\boldsymbol{A}$, то говорят, что задана вектор-функция от скалярного аргумента t:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t).$$

При этом, вообще говоря, все компоненты являются функциями t:

$$A_i = A_i(t).$$

Изменение вектор-функции означает изменение как величины, так и направления вектора.

Изменение вектор-функции от скалярного аргумента графически изображается *годографом вектора.*

Годографом вектора $\boldsymbol{A}$ называется геометрическое место, образованное концами вектора при изменении t, если вектор откладывать (рис. 1.22) из некоторой фиксированной точки (полюса).

Если вектор меняется только по величине, то его годограф совпадает с прямой (рис. 1.23), если вектор меняется только по направлению, то его годографом является сферическая кривая (рис. 1.23).

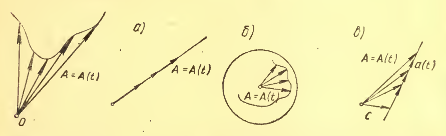


Рис. 1.22. Геометрической характеристикой вектор-функции служит ее годограф — кривая, описываемая концом вектора

Рис. 1.23. а) Годограф вектор-функции, меняющейся только по величине, б) Годограф вектор-функции, меняющейся только по направлению $\boldsymbol{A} : |\boldsymbol{A}| = \text{const}$. в) Вектор-функция, имеющая годографом прямую, может быть представлена в виде $\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}(t)$, где $\boldsymbol{c} = \text{const}$ и $\boldsymbol{a} : |\boldsymbol{a}| = \text{const}$

Если вектор имеет годографом прямую, то в общем случае он может меняться как по величине, так и по направлению (рис. 1.23), но всегда может быть представлен в виде суммы постоянного вектора и вектора переменного только по величине:

$$\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}(t),$$

где $\boldsymbol{c}$, $\dfrac{a_i}{|\boldsymbol{a}|}$ — постоянные величины.

Векторная производная. *Если для переменного вектора* $\boldsymbol{A}(t)$ *при* $t \to t_0$ *существует такой постоянный вектор* $\boldsymbol{A}_0$, *что*

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{A}_0| = 0,$$

то вектор $\boldsymbol{A}_0$ называется пределом при $t \to t_0$ вектор-функции $\boldsymbol{A}(t)$.

Производной $\frac{dA}{dt}$ от вектор-функции по скалярному аргументу (векторной производной) называется предел (если он существует)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}. \qquad (1.53)$$

Поскольку вектор $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ направлен по секущей к годографу, то вектор $\frac{dA}{dt}$, являющийся пределом $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, направлен по касательной к годографу вектора $\boldsymbol{A}(t)$ (рис. 1.24).

Векторная производная $\frac{dA}{dt}$ *всегда направлена по касательной к годографу вектора* $\boldsymbol{A}(t)$.

Рис. 1.24. Производная вектор-функции скалярного аргумента является вектором и направлена по касательной к годографу этой функции

Если выбрать *постоянные*, не зависящие от изменения аргумента t, *оси декартовой прямоугольной системы координат*, то

$$\boldsymbol{A}(t) = A_k(t)\, \boldsymbol{i}_k,$$

где $\boldsymbol{i}_k$ — постоянные векторы.

Тогда

$$\frac{dA}{dt} = \boldsymbol{i}_k \frac{dA_k}{dt}; \quad \left(\frac{dA}{dt}\right)_k = \frac{dA_k}{dt}.$$

Компоненты векторной производной $\frac{dA}{dt}$ являются производными от компонент вектор-функции $\boldsymbol{A}(t)$, если координатная система не меняется с течением аргумента t. При этом величина векторной производной может быть вычислена по формуле

$$\left|\frac{dA}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dA_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dA_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dA_3}{dt}\right)^2}. \qquad (1.54)$$

Если $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор материальной точки, а t — время, то движение точки в самом общем случае характеризуется ее уравнением движения или вектор-функцией $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.

Истинной скоростью V в момент времени t является вектор-функция

$$V(t) = \frac{dr}{dt},$$

а истинным ускорением W — вектор-функция

$$W(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}.$$

Правила дифференцирования вектор-функций устанавливаются из определения производной вектор-функции и имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \frac{d}{dt}(A \pm B) = \frac{dA}{dt} \pm \frac{dB}{dt};\\ &2)\ \frac{d}{dt}(\varphi A) = \frac{d\varphi}{dt} A + \varphi \frac{dA}{dt};\\ &3)\ \frac{d}{dt}(A \cdot B) = \frac{dA}{dt} \cdot B + A \cdot \frac{dB}{dt},\\ &4)\ \frac{d}{dt}(A \times B) = \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{1.55}$$

Рассмотрим, например, доказательство правила (4):

$$\frac{d}{dt}(A \times B) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(A + \Delta A) \times (B + \Delta B) - A \times B}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta A \times B) + (A \times \Delta B) + (\Delta A \times \Delta B)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta A}{\Delta t} \times B\right) + \lim_{\Delta t \to 0} \left(A \times \frac{\Delta B}{\Delta t}\right) + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} \times \Delta B =$$

$$= \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt}.$$

Заметим, что при использовании правила (4) следует всегда учитывать некоммутативность векторного произведения.

Неопределенный интеграл от вектор-функции. *Неопределенным интегралом от вектор-функции* $A(t)$ *называется вектор-функция* $B(t) \equiv \int A(t)\,dt$, *векторная производная которой равна* $A(t)$, *т. е.*

$$\frac{dB}{dt} = A(t).$$

Таким образом,

$$B(t)=\int A(t)\,dt+C, \qquad (1.56)$$

где C — постоянный вектор.

Если выбрана неизменная (не зависящая от t) система координат, то компоненты неопределенного интеграла полностью определяются неопределенными интегралами от компонент вектор-функции, т. е.

$$B_i=\int A_i(t)\,dt+C_i \qquad (1.57)$$

Величины B_i являются компонентами вектора.

Аналогично можно ввести понятие определенного интеграла.

Задачи и упражнения

Задача 1. Получить формулы линейного ортогонального преобразования координат.

Решение. Пусть в пространстве введены две прямоугольные декартовы системы координат (K) и (K') (рис. 1.25). Задача состоит в выражении координат (x_1, x_2, x_3) произвольной точки M в системе (K) через координаты (x_1', x_2', x_3') в системе (K') и наоборот.

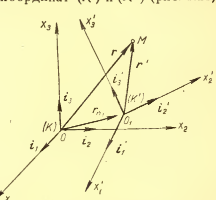


Рис. 1.25. Преобразование декартовых координат

Пусть r и r' — соответственно радиус-векторы точки M в системах (K) и (K'), орты которых (i_1, i_2, i_3) и (i_1', i_2', i_3'). Положение начала O_1 системы (K') в системе (K) определяется радиусом-вектором r_{01}, а положение начала системы (K) в системе (K') — радиусом-вектором r_0', так что $r_{01}=-r_0'$. Пусть, наконец, $\alpha_{i'k}$ косинус угла между i-й осью системы (K') и k-й осью системы (K), так что

$$\alpha_{i'k}=\cos(x_i', x_k)=i_i'\cdot i_k. \qquad (*)$$

Тогда (рис. 1.25)

$$r = r' + r_{0i};$$
$$r' = r + r'_0.$$

Используя выражение для радиуса-вектора получим *:

$$x_k i_k = x'_k \, i'_k + x_k^{01} \, i_k; \qquad (**)$$
$$x'_k \, i'_k = x_k i_k + x_k^{\prime 0} \, i'_k. \qquad (***)$$

Умножая (**) скалярно на i_l, а (***) на i'_l и используя (1.8) и (*), получим:

$$x_l = (i'_k \cdot i_l) \, x'_k + x_l^{01} = \alpha_{k'l} \, x'_k + x_i^{01};$$
$$x'_l = (i_k \cdot i'_l) \, x_k + x_l^{\prime 0} = \alpha_{l'k} x_k + x_l^{\prime 0}.$$

Эти выражения и представляют формулы линейного ортогонального преобразования координат.

Коэффициенты этих формул удовлетворяют условиям ортогональности. Эти условия можно получить, используя формулу (1.9) для разложения ортов i_k системы (K) по ортам i'_k системы (K') и ортов i'_k по ортам i_k.

Полагая в (1.9) $A = i'_l$, получим

$$i'_l = \alpha_{l'l} \, i_l.$$

Аналогично получим

$$i_l = \alpha_{l'l} \, i'_l.$$

Умножая первое разложение скалярно на i'_k, а второе — на i_k, получим:

$$i'_l \cdot i'_k = \alpha_{l'l} \, \alpha_{k'l};$$
$$i_l \cdot i_k = \alpha_{l'l} \, \alpha_{l'k}.$$

Используя (1.8) и вводя символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = k; \\ 0, \text{ если } i \neq k, \end{cases}$$

получим:

$$\alpha_{l'l} \, \alpha_{k'l} = \delta'_{lk},$$
$$\alpha_{l'l} \, \alpha_{l'k} = \delta_{lk}.$$

* Следует помнить, что

$$x_k i_k \equiv \sum_{k=1}^{3} x_k i_k = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3.$$

Задача 2. Доказать теорему косинусов в треугольнике.

Решение. Изобразим стороны треугольника ABC в виде векторов $AB \equiv \boldsymbol{c}$, $AB \equiv \boldsymbol{b}$, $CB \equiv \boldsymbol{a}$.

Тогда

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}.$$

Возводя в квадрат, получим

$$a^2 + b^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = c^2.$$

Используя понятие скалярного произведения, получим

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos(\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b}) = ab\cos(\pi - \alpha) = -ab\cos\alpha,$$

где $\alpha = \angle ACB$.

Таким образом,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

Задача 3. Доказать, что

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Указание. Применить формулу

$$\cos(\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}$$

к двум векторам $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 1$, лежащим в плоскости (xy) и составляющим углы α и β с осью (x).

Задача 4. Выразить скалярное произведение двух векторов через ковариантные и контравариантные компоненты.

Решение. По определению

$$A\cdot B = A^l e_l \cdot B^k e_k = A_l e^l \cdot B_k e^k = A_l e^l \cdot B^k e_k =$$
$$= A^l e_l \cdot B_k e^k = g_{lk} A^l B^k = g^{lk} A_l B_k = A_l B^l = A^l B_l,$$

ибо в силу (1.39)

$$g_i^k = \delta_i^k = \begin{cases} 0, & i \neq k; \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Замечая, что модуль вектора A, например, равен

$$|A| = A = \sqrt{A\cdot A} \equiv \sqrt{g_{lk}A^l A^k} = \sqrt{g^{lk}A_l A_k} = \sqrt{A_l A^l},$$

то угол между векторами A и B может быть найден по одной из следующих формул:

$$\cos(A, \ B) = \frac{g_{lk}A^l B^k}{\sqrt{g_{lk}A^l A^k}\ \sqrt{g_{lk}B^l B^k}} = \frac{g^{lk}A_l B_k}{\sqrt{g^{lk}A_l A_k}\ \sqrt{g^{lk}B_l B_k}} =$$
$$= \frac{A_l B^l}{\sqrt{A_l A^l}\ \sqrt{B_l B^l}}$$

(числитель и подкоренное выражение записаны в сокращенных обозначениях, т. е. это соответствующие суммы).

Задача 5. Выразнть векторное пронзведение двух векторов в косоугольной снстеме координат.

Р е ш е н н е.

По определению

$$C = A \times B = A^j e_j \times B^i e_i = (A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3) \times (B^1 e_1 + B^2 e_2 \times B^3 e)_3 =$$
$$= A^1 B^1 (e_1 \times e_1) + A^1 B^2 (e_1 \times e_2) + A^1 B^3 (e_1 \times e_3) + A^2 B^1 (e_2 \times e_1) + \ldots +$$
$$+ A^3 B^3 (e_3 \times e_3) = (e_i \times e_j)(A^i B^j - A^j B^i).$$

Но, по (1.24) и (1.46)

$$V, e^k = e_i \times e_j; \quad V, = \sqrt{G}.$$

Поэтому

$$C = A \times B = C_k e^k,$$

где

$$C_k = \sqrt{G}\,(A^i B^j - A^j B^i).$$

Также можно показать, что

$$C^k = \frac{1}{\sqrt{G}}(A_i B_j - A_j{}'{}_i).$$

Задача 6. *Вывести основные формулы сферической тригонометрии.*

Р е ш е н и е.

Возьмем на сфере единичного радиуса сферический треугольник ABC (рис. 1.26), высекаемый трехгранным углом $OABC$. Пусть α, β, γ — углы этого треугольника, а длины его сторон равны a, b, c. Поскольку радиус сферы равен единице, то a равно плоскому углу BOC, b — плоскому углу AOC и c — плоскому углу AOB.

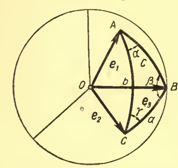


Рис. 1.26. Обозначения углов сферической тригонометрии

Установим зависимость между углами α, β, γ сферического треугольника и его сторонами a, b, c (плоскими углами трехгранного угла $OABC$).

Введем *единичные* векторы e_1, e_2, e_3 (рис. 1.26), направленные из центра сферы к вершинам сферического треугольника.

Угол между плоскостями OAC и OAB (угол α) равен углу между нормалями к этим плоскостям. Поэтому

$$\cos\alpha = \frac{(e_1 \times e_2)\cdot(e_1 \times e_3)}{|e_1 \times e_2|\cdot|e_1 \times e_3|}.$$

Переставляя в смешанном произведении числителя сомножители и раскрывая по (1.19) двойное векторное произведение, а также учитывая, что

$$|e_1 \times e_2| = \sin b; \quad |e_1 \times e_3| = \sin c,$$

получим

$$\cos\alpha = \frac{e_1\cdot[e_2\times(e_1\times e_3)]}{\sin b\cdot\sin c} = \frac{e_1\cdot[e_1(e_2\cdot e_3) - e_3(e_2\cdot e_1)]}{\sin b\cdot\sin c} =$$

$$= \frac{\cos a - \cos c\cdot\cos b}{\sin b\cdot\sin c}.$$

Отсюда имеем:

$$\cos a = \cos b\cdot\cos c + \sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha.$$

Совершенно аналогично получаются формулы:

$$\cos b = \cos c\cos a + \sin c\sin a\cos\beta;$$

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma.$$

Вторую группу формул получим, вычисляя синусы углов α, β, γ. Например:

$$\sin\alpha = \frac{|(e_1\times e_2)\times(e_1\times e_3)|}{|e_1\times e_2|\cdot|e_1\times e_3|}.$$

Читателю предлагается получить соотношения

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$

Задача 7. *Составить уравнение прямой в векторной форме.*

Рассмотрим несколько случаев определения уравнения прямой в пространстве.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки A и B (рис. 1.27) в пространстве.

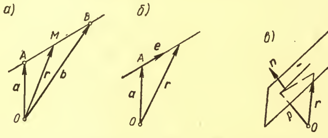


Рис. 1.27. а) Прямая, проходящая через две заданные точки. б) Прямая, для которой заданы точка и направление. в) К нормальной форме уравнения плоскости

Решение. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — радиусы-векторы заданных точек относительно некоторого начала. Тогда условием того, что любая точка M (ее радиус-вектор $\boldsymbol{r}$) лежит на прямой, является условие параллельности векторов $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, т. е.

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

Таким образом, если рассматривать λ как параметр, то уравнение прямой в параметрической форме имеет вид

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\lambda(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

Из этого уравнения, умножив его векторно на $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, можно исключить параметр λ. Тогда получим

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0,$$

или

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

2. Составить уравнение прямой, проходящей через заданную точку $A(\boldsymbol{a})$, параллельно данному вектору $\boldsymbol{e}$.

Решение. Использовав условие параллельности вектора $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$ и вектора $\boldsymbol{e}$, получим

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{e},$$

где λ — параметр. Этот параметр можно исключить, умножив уравнение векторно на $\boldsymbol{e}$:

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}.$$

3. Составить уравнение прямой, проходящей через заданную точку $A(\boldsymbol{a})$ перпендикулярно двум заданным векторам $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$.

Ответ.

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\lambda(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2);$$
$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2)=0.$$

Задача 8. Получить условие того, что точки $A(\boldsymbol{a})$, $B(\boldsymbol{b})$ и $C(\boldsymbol{c})$ лежат на одной прямой.

Решение. Исходя из решения предыдущей задачи, это условие может быть записано в виде

$$\frac{c_1-a_1}{b_1-a_1}=\frac{c_2-a_2}{b_2-a_2}=\frac{c_3-a_3}{b_3-a_3},$$

где a_i, b_i, c_i — декартовы координаты соответствующих точек в некоторой системе с началом в точке O.

Показать, что искомое условие может быть записано в виде

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=0,$$

и выяснить геометрический смысл этого условия.

Задача 9. *Составить уравнение плоскости в векторной форме.*

Рассмотрим несколько случаев определения плоскости в пространстве.

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $A(\boldsymbol{a})$, $B(\boldsymbol{b})$, $C(\boldsymbol{c})$.

Решение. Уравнение плоскости получается из условия компланарности векторов $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ и имеет вид в параметрической форме

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\mu(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}),$$

где λ, μ — параметры.

Для исключения параметров умножим это уравнение сначала векторно на $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$, а затем скалярно на $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. Получим

$$[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})]\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0.$$

Это можно было написать сразу, если учесть необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов (1.17).

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $A(\boldsymbol{a})$, $B(\boldsymbol{b})$, параллельно заданному вектору $\boldsymbol{e}_1$.

Ответ.

$$[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})]\cdot\boldsymbol{e}_1=0.$$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(\boldsymbol{a})$, параллельно двум векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

Ответ.

$$[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{e}_1]\cdot\boldsymbol{e}_2=0.$$

4. Составить уравнение плоскости, если задано ее расстояние p от начала O (рис. 1.27) и направление перпендикуляра к ней (орт $\boldsymbol{n}$ нормали к плоскости).

Решение. Если $\boldsymbol{n}$ — орт нормали к плоскости, направленный в сторону, где не лежит начало (O), то для любой точки $\boldsymbol{r}$ плоскости справедлива формула

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=r\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})=p.$$

Это и есть уравнение плоскости (нормальная форма уравнения плоскости).

Задача 10. Показать при каком условии точки $A(\boldsymbol{a})$, $B(\boldsymbol{b})$, $C(\boldsymbol{c})$ и $D(\boldsymbol{d})$ лежат в одной плоскости.

Ответ.

$$[(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})]\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0.$$

Задача 11. Показать, что бесконечно малые повороты являются векторами.

Решение. Рассмотрим первый пример 1.2 (рис. 1.3, *а*).

Введем векторы $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$, $\overline{OA_3}$. Первый поворот сферы можно охарактеризовать смещением точки ее из положения

A_1 в A_2, а второй — из положения A_2 в A_3. Если считать углы α_1, α_2, α_3 малыми, то можно записать:

$$\overline{OA}_2 = \overline{OA}_1 + \overline{A_1A}_2 = \overline{OA}_1 + (\boldsymbol{\alpha}_1 \times \overline{OA}_1).$$

Действительно: $|\boldsymbol{\alpha}_1 \times \overline{OA}_1| = \alpha_1 \cdot OA_1 = \overset{\frown}{A_1A_2} = |\overline{A_1A}_2|$ и, кроме того, вектор $\boldsymbol{\alpha}_1 \times \overline{OA}_1$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\overline{A_1A}_2$.

Аналогично

$$\overline{OA}_3 = \overline{OA}_2 + \overline{A_2A}_3 = \overline{OA}_2 + (\boldsymbol{\alpha}_2 \times \overline{OA}_2).$$

Подставляя сюда полученное выше выражение для $\overline{O}A_2$, получим

$$\overline{OA}_3 = \overline{OA}_1 + (\boldsymbol{\alpha}_1 \times \overline{OA}_1) + \boldsymbol{\alpha}_2 \times [\overline{OA}_1 + (\boldsymbol{\alpha}_1 \times \overline{OA}_1)] =$$
$$= \overline{OA}_1 + (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) \times \overline{OA}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \times (\boldsymbol{\alpha}_1 \times \overline{OA}_1) =$$
$$= \overline{OA}_1 + (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) \times \overline{OA}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \times (\boldsymbol{\alpha}_1 \times \overline{OA}_1). \qquad (*)$$

С другой стороны, если ввести поворот $\overline{\alpha}_3$, переводящий точку из A_1 в A_3, получим

$$\overline{OA}_3 = \overline{OA}_1 + \underline{\alpha_3} \times \overline{OA}_1. \qquad (**)$$

Если α_1, α_2, α_3 — бесконечно малые величины, то тогда (и только тогда), отбрасывая бесконечно малые второго порядка и сравнивая (*) и (**), получим

$$\underline{\alpha_3} = \underline{\alpha_1} + \underline{\alpha_2} = \underline{\alpha_2} + \underline{\alpha_1}$$

Таким образом, бесконечно малые повороты являются векторами, ибо они подчиняются законам векторной алгебры (результирующий поворот является геометрической суммой слагаемых, величина которой не меняется от изменения порядка слагаемых).

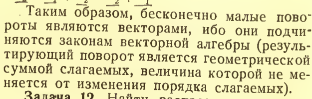


Рис. 1.28. Скорость и осестремительное ускорение точек твердого тела, имеющего неподвижную точку O

Задача 12. Найти распределение скоростей точек твердого тела, имеющего неподвижную точку O (рис. 1.28).

Решение. Сместим тело из начального положения в близкое так, что его некоторая точка $M(\boldsymbol{r})$ перейдет в положение M_1. Элементарное смещение $\Delta\boldsymbol{r}$ точки M может быть выражено, согласно предыдущей задаче, через вектор бесконечно малого поворота $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ следующим образом:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}.$$

Разделив на Δt время перемещения точки M в M_1 и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r},$$

где $V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$ — скорость точки M, а $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ — мгновенная угловая скорость вращения твердого тела.

Эта формула носит название *формулы Эйлера.*

Задача 13. *Эйлеровы углы.*

Как следует из формул линейного ортогонального преобразования координат, положение системы (K') по отношению к системе (K), имеющей с ней общее начало, можно определить *тремя* независимыми параметрами (девять косинусов углов между осями (K) и (K') должны удовлетворять шести условиям ортогональности). В качестве трех параметров в кинематике зачастую выбирают углы Эйлера.

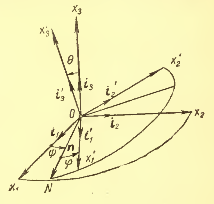


Рис. 1.29. Эйлеровы углы

Систему (K) в систему (K') можно перевести при помощи трех поворотов (рис. 1.29): 1) на угол ψ вокруг оси (x_3) (угол прецессии); 2) на угол θ вокруг линии ON (линия узлов с ортом $\boldsymbol{n}$), где θ — угол нутации; 3) на угол φ вокруг оси (x_3') (угол чистого вращения).

Независимые параметры ψ, θ, φ называются углами Эйлера.

Требуется выразить орты i_1', i_2', i_3' системы (K') через орты i_1, i_2, i_3 системы (K) и углы Эйлера.

Решение. В задаче 1 этой главы было получено:

$$i_1' = \alpha_{1'1} i_1 + \alpha_{1'2} i_2 + \alpha_{1'3} i_3;$$

$$i_2' = \alpha_{2'1} i_1 + \alpha_{2'2} i_2 + \alpha_{2'3} i_3;$$

$$i_3' = \alpha_{3'1} i_1 + \alpha_{3'2} i_2 + \alpha_{3'3} i_3.$$

Из сферического треугольника, образуемого на единичной сфере концами ортов i_1, $\boldsymbol{n}$ и i_1', согласно формулам, полученным в задаче 6, получим

$$\alpha_{1'1} = \cos(i_1', i_1) = \cos\psi\cos\varphi + \sin\varphi\sin\psi\cos(\pi - \theta) =$$

$$= \cos\psi\cos\varphi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta.$$

Из других сферических треугольников получим, выбирая каждый раз одну вершину в конце орта $\boldsymbol{n}$ линии узлов:

$$\alpha_{1'2} = \cos(\boldsymbol{i}_1', \boldsymbol{i}_2) = \cos\varphi\cos\left(\frac{\pi}{2} - \Psi\right) + \sin\varphi\sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)\cos\theta =$$

$$= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta;$$

$$\alpha_{1'3} = \cos(\boldsymbol{i}_1', \boldsymbol{i}_3) = \cos\varphi\cos\frac{\pi}{2} + \sin\varphi\sin\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$= \sin\varphi\sin\theta.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{i}_1' = \boldsymbol{i}_1(\cos\psi\cos\varphi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) +$$
$$+ \boldsymbol{i}_2(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + \boldsymbol{i}_3\sin\varphi\sin\theta.$$

Остальные формулы имеют вид:

$$\boldsymbol{i}_2' = \boldsymbol{i}_1(-\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta) +$$
$$+ \boldsymbol{i}_2(\cos\psi\cos\varphi\cos\theta - \sin\psi\sin\varphi) + \boldsymbol{i}_3\sin\theta\cos\varphi;$$
$$\boldsymbol{i}_3' = \boldsymbol{i}_1\sin\psi\sin\theta - \boldsymbol{i}_2\cos\psi\sin\theta + \boldsymbol{i}_3\cos\theta.$$

Задача 14. Показать, что (см. условие предыдущей задачи):

$$\boldsymbol{i}_1 = (\cos\psi\cos\varphi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta)\boldsymbol{i}_1' + (-\cos\psi\sin\varphi -$$
$$- \sin\psi\cos\varphi\cos\theta)\boldsymbol{i}_2' + \boldsymbol{i}_3'\sin\psi\sin\theta;$$

$$\boldsymbol{i}_2 = (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta)\boldsymbol{i}_1' + (\cos\psi\cos\varphi\cos\theta -$$
$$- \sin\psi\sin\varphi)\boldsymbol{i}_2' - \boldsymbol{i}_3'\cos\psi\sin\theta;$$

$$\boldsymbol{i}_3 = \boldsymbol{i}_1'\sin\varphi\sin\theta + \boldsymbol{i}_2'\sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{i}_3'\cos\theta.$$

Задача 15. Момент $\boldsymbol{M}_0$ силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки O определяется выражением

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F},$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор начала вектора $\boldsymbol{F}$ относительно точки O.

Моментом силы $\boldsymbol{F}$ относительно оси (u), проходящей через точку O, называется проекция $\boldsymbol{M}_0$ на ось (u), т. е.

$$M_u = \boldsymbol{M}_0 \cdot \boldsymbol{u}_0 = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})\ \boldsymbol{u}_0,$$

где $\boldsymbol{u}_0$ — орт оси (u).

Показать, что величина M_u не зависит от расположения точки O на оси (u).

Задача 16. Пусть в точках, определяемых радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_k, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ относительно некоторого начала O, расположены заряды, равные соответственно $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots, e_n$.

Дипольным моментом этой системы зарядов относительно начала O называется вектор.

$$\boldsymbol{p} = \sum_{k=1}^{n} e_k \boldsymbol{r}_k .$$

Назовем центром зарядов (по аналогии с центром масс) этой системы точку C, определяемую радиусом-вектором,

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{p}}{\sum\limits_{k=1}^{n} e_k} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} e_k \boldsymbol{r}_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} e_k} .$$

Эту точку можно определить, если $\sum\limits_{k=1}^{n} e_k \neq 0$.

Если $\sum\limits_{k=1}^{n} e_k = 0$, то система зарядов нейтральна.

1. Показать, что дипольный момент нейтральной системы не зависит от начала, относительно которого он вычисляется.

2. Выразить дипольный момент через центры систем положительных и отрицательных зарядов, составляющих нейтральную систему.

Решение. **1.** Пусть $\boldsymbol{p} = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \boldsymbol{r}_k$ — дипольный момент относительно начала O, а $\boldsymbol{p}' = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \boldsymbol{r}'_k$ — относительно начала O', причем $\overline{OO'} = \boldsymbol{r}_0$.

Тогда $\boldsymbol{r}'_k = \boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{r}_0$. Следовательно,

$$\boldsymbol{p}' = \sum_{k=1}^{n} e_k \boldsymbol{r}'_k = \sum_{k=1}^{n} e_k (\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{r}_0) = \sum_{k=1}^{n} e_k \boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{r}_0 \sum_{k=1}^{n} e_k .$$

Отсюда, если система зарядов нейтральна $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} e_k = 0\right)$, следует:

$$\boldsymbol{p}' = \sum_{k=1}^{n} e_k \boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{p}.$$

2. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{n} e_k = 0$. Тогда в системе есть отрицательные

заряды e_k^- и положительные e_k^+. Разобьем всю сумму зарядов на суммы положительных и отрицательных, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} e_k = \sum e_k^- + \sum e_k^+ = 0.$$

Тогда обозначим

$$\sum e_k^+ = -\sum e_k^- = Q.$$

По определению, центры положительных и отрицательных зарядов находятся в точках, радиусы-векторы которых равны

$$\boldsymbol{R}^+ = \frac{\sum e_k^+ \boldsymbol{r}_k^+}{\sum e_k^+}; \quad \boldsymbol{R}^- = \frac{\sum e_k^- \boldsymbol{r}_k^-}{\sum e_k^-}.$$

Тогда дипольный момент системы равен

$$\boldsymbol{p} = \sum_{k=1}^{n} e_k \boldsymbol{r}_k = \sum e_k^+ \boldsymbol{r}_k^+ + \sum e_k^- \boldsymbol{r}_k^- =$$

$$= \boldsymbol{R}^+ \sum e_k^+ + \boldsymbol{R}^- \sum e_k^- = Q(\boldsymbol{R}^+ - \boldsymbol{R}^-).$$

Задача 17. *Столкновение частиц.* Пусть две частицы одинаковой массы до столкновения имели скорости $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$, а после столкновения приобрели скорости $\boldsymbol{V}_1'$ и $\boldsymbol{V}_2'$ (рис. 1.30). Поскольку столкновение частиц происходит под действием

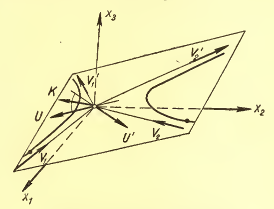


Рис. 1.30. Столкновение частиц

центральных сил, то, как известно из механики, их траектории будут лежать в одной плоскости в системе координат, где покоится центр инерции. Для такого столкновения

справедливы законы сохранения количества движения и кинетической энергии системы (потенциальная энергия до и после столкновения равна нулю); поэтому

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{V}_1' + \boldsymbol{V}_2', \\ V_1^2 + V_2^2 = V_2'^2 + V_2'^2. \end{cases} \qquad (*)$$

1. Выразить скорости после столкновения $\boldsymbol{V}_1'$ и $\boldsymbol{V}_2'$ через начальные скорости $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$.

2. Показать, что относительные скорости

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1,$$
$$\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{V}_2' - \boldsymbol{V}_1'$$

до ($\boldsymbol{U}$) и после ($\boldsymbol{U}'$) столкновения равны по абсолютной величине.

Решение. 1. Система (*) представляет собой систему четырех скалярных уравнений относительно шести компонент скоростей $\boldsymbol{V}_1'$, $\boldsymbol{V}_2'$. Таким образом, явное выражение $\boldsymbol{V}_1'$, $\boldsymbol{V}_2'$ через $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$ может быть осуществлено введением двух дополнительных параметров, характеризующих геометрию столкновения [положение плоскости траектории в некоторой системе (x_1, x_2, x_3)]. Это означает, что столкновение двух частиц может быть полностью охарактеризовано значением двух геометрических параметров. Эти геометрические параметры мы введем при помощи орта $\boldsymbol{k}(|\boldsymbol{k}|=1)$ по направлению изменения скорости первой частицы (рис. 1.30), т. е.

$$\boldsymbol{V}_1' - \boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{k}A. \qquad (**)$$

Два независимых угла, которые составляют $\boldsymbol{k}$ с осями системы (x_1, x_2, x_3), могут быть приняты за геометрические параметры столкновения.

Тогда из первого уравнения системы (*) следует

$$\boldsymbol{V}_2' - \boldsymbol{V}_2 = -\boldsymbol{k}A. \qquad (***)$$

Подставляя $\boldsymbol{V}_1'$ и $\boldsymbol{V}_2'$ из (**) и (***) во второе уравнение системы (*), получим выражение для A. Имеем:

$$V_1^2 + V_2^2 = (\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{k}A)^2 + (\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{k}A)^2 =$$
$$= V_1^2 + 2A(\boldsymbol{V}_1 \cdot \boldsymbol{k}) + A^2 + V_2^2 - 2A(\boldsymbol{V}_2 \cdot \boldsymbol{k}) + A^2.$$

Отсюда

$$A = \boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{U}.$$

Тогда из (**) и (***) имеем

$$\boldsymbol{V}_1' = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{U});$$
$$\boldsymbol{V}_2' = \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{U}). \qquad (****)$$

Эти формулы и дают явное выражение конечных скоростей V_1' и V_2', через скорости V_1 и V_2 до столкновения и вектор $\boldsymbol{k}$.

2. Вычитая из второго уравнения системы (****) первое, получим

$$U' = U - 2\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} \cdot U). \qquad (*****)$$

Возводя в квадрат, получим

$$U'^2 = U^2,$$

т. е. $U' = U$ — величина относительной скорости частиц сохраняется при столкновении.

Нетрудно показать, что вектор $\boldsymbol{k}$ делит угол между U и $-U'$ пополам. Действительно, умножив (*****) скалярно на $\boldsymbol{k}$, получим

$$U' \cdot \boldsymbol{k} = -U \cdot \boldsymbol{k}.$$

Задача 18. Рассмотреть столкновение частиц с разными массами m_1 и m_2. Показать, что величина относительной скорости $U = V_2 - V_1$ сохраняется при столкновении.

Решение. Пусть $p_1 = m_1 V_1$; $p_2 = m_2 V_2$; $p_1' = m_1 V_1'$; $p_2' = m_2 V_2'$, где V_1, V_2 — скорости частиц до столкновения, а V_1', V_2' — после столкновения.

Закон сохранения количества движения и кинетической энергии имеет вид

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2',$$
$$p_1^2 + mp_2^2 = p_1'^2 + mp_2'^2 \qquad \left(m = \frac{m_1}{m_2}\right). \qquad (*)$$

Вводя орт $\boldsymbol{k}$ соотношениями

$$p_1' - p_1 = \boldsymbol{k}A,$$
$$p_2' - p_2 = -\boldsymbol{k}A$$

и определяя A из второго уравнения (*), получим

$$A = \frac{2}{1+m}\boldsymbol{k} \cdot (mp_2 - p_1) = \frac{2m_1}{1+m}(\boldsymbol{k} \cdot U).$$

Следовательно,

$$p_1' = p_1 + \frac{2}{1+m}\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k} \cdot (mp_2 - p_1)] = p_1 + \frac{2m_1}{1+m}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} \cdot U);$$

$$p_2' = p_1 - \frac{2}{1+m}\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k} \cdot (mp_2 - p_1)] = p_2 - \frac{2m_1}{1+m}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} \cdot U).$$

Отсюда имеем:

$$mp_2' - p_1' = mp_2 - p_1 - 2\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}(mp_2 - p_1)],$$

или

$$U' = U - 2k(k \cdot U), \qquad (^{**})$$

где обозначено

$$U' = V_2' - V_1'.$$

Возводя выражение (**) в квадрат, получим

$$U' = U.$$

Упражнения

1. Доказать, что проекция на любую ось суммы векторов равна сумме проекций слагаемых на ту же ось.

2. Даны векторы

$$A = i_1 + 2i_2 + 3i_3;$$
$$B = 4i_1 + 5i_2 + 6i_3;$$
$$C = 3i_1 + 2i_2 + i_3;$$
$$D = 6i_1 + 5i_2 + 4i_3,$$

где i_1, i_2, i_3 — орты декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3).

Найти:

1) суммы и разности векторов:

$$A + B + C + D; \quad A + B - C - D; \quad A - B + C - D;$$
$$-A + B - C + D;$$

2) углы, которые составляют векторы A, B, C, D с осями координат;

3) модули векторов A, B, C, D.

3. Найти сумму трех векторов, имеющих длину a и проведенных:

1) из вершины куба по трем его ребрам;

2) из вершины правильной треугольной пирамиды по трем ее ребрам.

4. Зная, что центр масс C системы материальных точек определяется радиусом-вектором r_c, имеющим вид

$$r_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

где m_i — массы точек, r_i — их радиусы-векторы, n — число точек, определить:

1) центр масс системы точек, расположенных в вершинах квадрата (длина стороны a), с массами $1г$, $2г$, $3г$, $4г$;

2) центр масс системы точек, расположенных в вершинах правильного треугольника (длина стороны a), с массами $1г$, $2г$, $3г$;

3) центр масс системы точек, расположенных в вершинах куба (длина стороны a), с массами $1г$, $2г$, $3г$, $4г$ (нижнее основание) и $5г$, $6г$, $7г$, $8г$ (верхнее основание).

Где будет находиться центр масс куба, если в его противоположных вершинах сосредоточены одинаковые массы?

5. В параллелограмме острый угол равен $\frac{\pi}{3}$, а стороны $a = 3$ и $b = 5$. Изображая его стороны в виде векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, определить:

1) векторы $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ (построить);

2) площадь параллелограмма;

3) проекцию каждой стороны параллелограмма на направление другой стороны.

6. Для векторов, приведенных в упражнении 2, определить:

1) скалярное произведение суммы двух первых векторов на сумму двух последующих;

2) углы, которые образуют вектор $\boldsymbol{A}$ с остальными векторами $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, и $\boldsymbol{D}$;

3) проекцию вектора $\boldsymbol{A}$ на направление векторов $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$;

4) векторные произведения $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ и углы, которые они обрзуют с вектором $\boldsymbol{D}$;

5) площади параллелограммов, построенных на векторах $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$; найти длины диагоналей этих параллелограммов.

7. Показать, что все векторы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ (упражнение 2) лежат в одной плоскости.

8. Даны векторы:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}_1 + 2\boldsymbol{i}_2 + 3\boldsymbol{i}_3;$$
$$\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{i}_1 + 5\boldsymbol{i}_2;$$
$$\boldsymbol{C} = 3\boldsymbol{i}_1 + 2\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3.$$

Какую систему (правую или левую) образуют эти векторы?

Определить:

1) объем параллелепипеда, построенного на этих векторах;

2) векторы, изображающие две (исходящие из концов вектора $\boldsymbol{A}$) диагонали параллелепипеда, построенного на этих векторах, и найти длины этих диагоналей;

3) площадь диагонального сечения параллелепипеда, проведенного через вектор $\boldsymbol{A}$.

9. Используя формулу Эйлера $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, определить линейную скорость центра прямоугольника, вращающегося вокруг одной из вершин и имеющего стороны $a = 2$ *см* и $b = 4$ *см* в те моменты, когда мгновенная угловая скорость имеет величину $5 \frac{1}{сек}$ и направлена по меньшей и по большей стороне прямоугольника.

10. Определить момент силы, величиной в 5 *н*, направленной по одному из ребер куба, относительно всех его вершин и осей, проходящих через ребра (длина ребер куба равна *a см*).

11. Кинетическим моментом относительно центра O (моментом количества движения) системы n материальных точек называется векторная сумма

$$L_0 = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{V}_i,$$

где $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор i-й точки, имеющей массу и скорость $\boldsymbol{V}_i$.

Определить:

1) кинетический момент двух точек с массами $m_1 = 1$ *г*, $m_2 = 2$ *г*, вращающихся с угловой скоростью $\omega = 5 \frac{1}{сек}$ вокруг оси (x_3) и описывающих окружности радиусом 3 и 6 *см*;

2) кинетический момент точек массой 1 *г* и 2 *г*, движущихся в противоположные стороны со скоростью 3 *см/сек* по двум противолежащим ребрам куба, относительно всех его вершин (длина ребер куба равна *a см*).

12. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — два вектора, определяющие стороны параллелограмма с диагоналями $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$; показать, что:

1) сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон;

2) диагонали параллелограмма перпендикулярны тогда и только тогда, если этот параллелограмм — ромб;

3) площадь параллелограмма (A), построенного на диагоналях другого параллелограмма (B), в два раза больше площади этого параллелограмма (B).

13. В точках M_1, M_2, ..., M_n закреплены пружины с жесткостями соответственно C_1, C_2, ..., C_n, соединяющиеся в общей точке M (рис. 1.31).

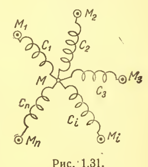
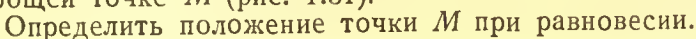


Рис. 1.31.


Определить положение точки M при равновесии.

Ответ.

$$r_M = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} C_i},$$

где r_i — радиусы-векторы точек M_i;
r_M — радиус-вектор точки M.

14. Проверить справедливость тождеств:

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0;$$

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot c & b \cdot d \end{vmatrix}.$$

15. Дан базис

$$e_1 = -4i_1 + 2i_2; \quad e_2 = 3i_1 + 3i_2; \quad e_3 = 2i_3,$$

где i_1, i_2, i_3 — орты прямоугольной декартовой системы координат.

Найти ко- и контравариантные составляющие вектора, проведенного из начала координат в точку (1, 1, 1).

16. Найти выражение векторно-скалярного произведения через ко- и контравариантные компоненты вектора.

Глава вторая

ПОНЯТИЕ ТЕНЗОРА И ЗАКОН ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЕГО КОМПОНЕНТ

2.1. Независимость физических законов от частного выбора пространственной системы координат. Изотропность и однородность пространства

Компоненты тензоров и их преобразование. Физические явления и количественные связи между физическими объектами, участвующими в них, не могут зависеть от системы координат, по отношению к которой рассматриваются явления, и от способа количественной характеристики свойств и состояний объектов, т. е. от способа измерения физических величин. Явления можно рассматривать в системах координат, различным образом ориентированных и с различным началом. Физически это связано с фундаментальными свойствами пространства — однородностью и изотропностью, о которых несколько подробнее будет сказано ниже.

Ранее были даны примеры скалярных и векторных величин в некоторой фиксированной системе координат. Было отмечено, что скалярные величины, т. е. такие, например, как масса, плотность, температура и т. п. — определяются только одним числом, в то время как векторы — смещение, сила, скорость, напряжение и др. — требуют для своего определения трех чисел (компонент). Удобно, как это станет скоро ясным, всю совокупность этих $3^1 = 3$ чисел, определяющих единый объект — вектор, называть *тензором первого ранга*, а скаляр, определяемый одним, $3^0 = 1$, числом, называть *тензором нулевого ранга.*

Для более сложных объектов часто требуется введение бо́льшего числа компонент: таковы, например, момент инерции, деформация упругого тела и т. п. Они определяются совокупностью $3^2 = 9$ чисел (компонент); совокупность их определяет тензор второго ранга. Совокупностью $3^3 = 27$

компонент можно определить пьезоэлектрические свойства кристалла — это *тензор третьего ранга*, в то время как упругие свойства анизотропного тела определяются *тензором четвертого ранга* — совокупностью $3^4 = 81$ чисел (компонент). Тензоры могут быть самого различного ранга. Отметим, что компоненты тензора любого n-го ранга не являются произвольным набором 3^n чисел.

Компоненты тензора любого ранга могут быть различны в различных точках пространств и в различные моменты времени, т. е. они могут быть функциями точки и времени — эта зависимость будет рассмотрена позже (гл. 4). С другой стороны, очевидно, компоненты одного и того же тензора будут иметь различные значения в разных пространственных системах координат. Предметом этой главы будет установление законов преобразования компонент, при переходе от одной координатной системы к другой. Они должны быть таковы, чтобы при любых преобразованиях координат *вся совокупность* компонент определяла одну и ту же величину — один и тот же тензор. Эти законы должны вытекать как из природы рассматриваемых величин, так и из свойств пространства.

Однородность и изотропность пространства. Выбираемые для описания физических явлений декартовы системы координат K и K' могут иметь различное начало и различную ориентацию, однако физический закон, сформулированный в системе K, через величины, относящиеся к этой системе, должен иметь тот же вид, как тот же физический закон, сформулированный в системе K' через величины, относящиеся к системе K'. Это означает, что любое явление протекает одинаково в любом месте при одинаковых внешних условиях.

Произвольность выбора начала (перенос) координатных систем является опытным фактом и отражает так называемую *однородность* пространства. Равноправность любой ориентации (поворот) координатных систем также является опытным фактом и означает *изотропность* пространства.

Из свойств однородности и изотропности пространства следует, что если два отрезка совпадают в каком-либо месте, то они совпадут при совмещении и в любом другом месте и при любой ориентации.

Если точкам пространства сопоставить три числа x_1, x_2, x_3 — координаты точки в прямоугольной декартовой системе, то расстояние между двумя точками измеряется по отрезку прямой, имеющему длину Δs, определяемую равенством

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2, \tag{2.1}$$

где Δx_1, Δx_2, Δx_3 — разности соответствующих координат двух точек.

Из свойств однородности и изотропности пространства следует *равноправность всех пространственных координатных систем* при рассмотрении физических величин и законов. Числа, определяющие физическую величину — ее компоненты, при переходе от одной допустимой системы координат к другой будут изменяться, однако закон изменения их должен быть таков, чтобы новая система компонент определяла ту же самую величину.

Таким образом, *закон преобразования компонент при изменении пространственной системы координат должен обеспечивать независимость физических величин от выбора (вообще говоря, произвольного) пространственной координатной системы.* С этой точки зрения закон преобразования позволяет объединить физические величины в единое понятие *тензоров.* Скаляры и векторы являются лишь частными видами тензоров.

С другой стороны, законы преобразования компонент для разных величин различны и определяются всякий раз свойствами этих величин. Различие в этих законах и позволяет классифицировать величины, приводя к понятию *тензоров различных рангов.*

В основе такой классификации лежит аналитический закон преобразования компонент при изменении пространственной системы координат. В дальнейшем мы будем рассматривать компоненты тензоров и их преобразования преимущественно в *прямоугольных* декартовых системах координат. Тем не менее будет коротко показано, что классификация тензоров совершенно аналогично может быть проведена по закону преобразования компонент при самых общих координатных преобразованиях*.

Независимость от частного выбора системы координат не является единственным требованием, предъявляемым к физическим величинам и законам, устанавливающим соотношения между этими величинами. В качестве другого такого общего требования укажем на широко известное *условие независимости законов от выбора системы единиц измерения величин.*

Физические величины имеют размерность. Однако выбор системы единиц измерения этих величин всегда остается произвольным. Таким образом, отношение двух значений величины не зависит от того, в каких единицах эта величина измерена (этот факт используется в теории размерностей при выводе основной формулы размерности).

Любой физический закон формулируется также независимо от выбора системы единиц измерения величин, между которыми он устанавливает соответствие.

Как известно, независимость закона от выбора системы единиц измерения обеспечивается *одинаковой размерностью* величин, которые входят в закон в виде слагаемых. В дальнейшем (см. 2.7) мы увидим, что незави-

---

* Более подробно см., например, П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ, ГИТТЛ, 1953.

симость закона от выбора системы пространственных координат обеспечивается *одинаковым рангом всех тензоров*, которые входят в закон в виде слагаемых.

Кратко резюмируем сказанное.

Опытный факт однородности и изотропности пространства приводит к требованию независимости физических величин от частного выбора пространственной системы координат. Эта независимость может быть обеспечена определенным законом преобразования чисел или функций, описывающих физическую величину, — компонент величины — при изменении системы координат. Кроме того, этот закон должен отражать всякий раз свойства данной физической величины. Различие в законах преобразования компонент величин приводит к понятию тензоров различных рангов.

В последующих параграфах мы рассмотрим тензоры различных рангов в связи с аналитическим законом преобразования их компонент, обеспечивающим инвариантность физических величин по отношению к выбору координатной системы.

2.2. Тензоры нулевого ранга (скаляры)

Выше уже отмечалось, что такие величины, как температура, объем, давление и др., называются скалярами. Приведем определение скаляра в связи с законом его изменения при преобразованиях координатной системы.

Скаляр — это величина, полностью определяемая в любой координатной системе одним числом (или функцией), которое не меняется при изменении пространственной системы координат.

Скаляр имеет одну компоненту.

Таким образом, если φ — значение скаляра в одной системе координат, а φ' — в другой, то

$$\varphi' = \varphi.$$

Рассмотрим пример скалярной величины.

Пример. Пусть A и B — две точки в пространстве, координаты которых в системе (K) декартовых координат суть x_k^A, x_k^B $(k = 1, 2, 3)$, а в другой декартовой системе (K') — $x_k'^A$, $x_k'^B$ ($k = 1, 2, 3$ (рис. 2.1)). Так как длина Δs отрезка прямой по своему определению является скаляром, то $\Delta s' = \Delta s$.

Рис. 2.1. Инвариантность длины отрезка AB лежит в основе вывода формулы ортогонального преобразования координат

Следовательно, для любых двух систем декартовых координат необходимо выполнение равенства*.

$$\sum_{k=1}^{3} \Delta x_k^2 = \sum_{k=1}^{3} \Delta x_k'^2. \tag{2.2}$$

Здесь

$$\Delta x_k = x_k^B - x_k^A; \quad (k = 1, 2, 3)$$
$$\Delta x_k' = x_k'^B - x_k'^A. \quad (k = 1, 2, 3).$$

Как известно из аналитической геометрии (см. также задачу 1, гл. 1), формулы преобразования декартовых координат имеют вид (применяя сокращенные обозначения):

$$x_1' = \alpha_{1'k} x_k + x_1'^0; \quad x_1 = \alpha_{k'1} x_k' + x_1^{01};$$
$$x_2' = \alpha_{2'k} x_k + x_2'^0; \quad x_2 = \alpha_{k'2} x_k' + x_2^{01};$$
$$x_3' = \alpha_{3'k} x_k + x_3'^0; \quad x_3 = \alpha_{k'3} x_k' + x_3^{01},$$

или

$$x_i' = \alpha_{i'k} x_k + x_i^{01};$$
$$x_i = \alpha_{k'i} x_k' + x_i^{0'} \tag{2.3}$$
$$(i = 1, 2, 3),$$

отсюда

$$\Delta x_i' = \alpha_{i'k} \Delta x_k. \tag{2.4}$$

Здесь $\alpha_{i'k} = \cos(x_i', x_k)$ — косинус угла между i-й новой осью и k-й старой осью.

Все коэффициенты $\alpha_{i'k}$ этого ортогонального линейного преобразования не зависят от координат, и между ними существуют соотношения:

$$\alpha_{i'l}\alpha_{l'k} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k; \end{cases}$$
$$\alpha_{i'l}\alpha_{k'l} = \delta_{ik}' = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \tag{2.5}$$

Ортогональные линейные преобразования обеспечивают выполнение условия (2.2).

---

* Здесь и всюду в дальнейшем мы будем считать, что единицы масштабов в системах остаются неизменными.

Действительно, вычислим $\sum_{i=1}^{3} \Delta x_i'^2$, используя (2.4):

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta x_i'^2 = \sum_{i'=1}^{3} \alpha_{i'k} \Delta x_k \alpha_{i'l} \Delta x_l = \Delta x_k \Delta x_l \alpha_{i'k} \alpha_{i'l}.$$

В силу соотношений (2.5) имеем:

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta x_i'^2 = \Delta x_k \Delta x_l \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{3} \Delta x_k^2.$$

Таким образом, закон преобразования координат (2.3) обеспечивает инвариантность длины отрезка прямой по отношению к любым ортогональным изменениям координатной системы.

2.3. Тензоры 1-го ранга (векторы)

Векторные величины (перемещение, ускорение, сила и др.), как уже указывалось, требуют для своего определения трех действительных чисел или функций. Векторы — величины более высокого ранга по сравнению со скалярами; они могут быть названы *тензорами 1-го ранга.*

Следует подчеркнуть, что *вектор — это не набор трех скалярных величин.* Двумя числами (плотность и температура) можно полностью охарактеризовать состояние идеального газа точно так, как двумя числами (разности абсцисс и ординат двух точек) можно описать перемещение в плоскости. Но при изменении системы пространственных координат плотность и температура не меняются, ибо они являются скалярами, и потому не могут образовывать вектор, в то время как разности координат изменяются при этом по определенному закону.

Три числа или функции, определяющие вектор, меняются при изменении пространственной системы координат, но по такому закону, что в любой из координатных систем они определяют один и тот же вектор.

Закон преобразования компонент вектора. Закон преобразования компонент вектора устанавливается на основании преобразования трех чисел Δx_i (см. 2.2). Если Δx_i — разности декартовых прямоугольных координат каких-либо двух точек в системе (K), то разности координат этих точек $\Delta x_i'$ в другой декартовой системе (K') определяются согласно формуле (2.4):

$$\Delta x_i' = \alpha_{i'k} \Delta x_k,$$

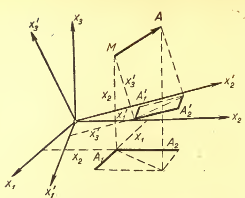


Рис. 2.2. Изменения компонентов вектора при изменении системы координат

где $\alpha_{i'k}$ — косинус угла между i'-й осью системы (K') и k-й осью системы (K).

Если в пространстве задан вектор $\boldsymbol{A}$, то его компоненты A_i определятся, если выбрана какая-то система (K) декартовых координат.

В другой системе координат (K') (рис. 2.2) его компоненты, естественно, будут другими A_i', хотя сам вектор $\boldsymbol{A}$ остается неизменным, в том смысле, что A_i' определяют тот же самый вектор (например, скорость точки M).

Так как каждому вектору можно сопоставить определенный отрезок в пространстве, то компонентам-векторам будут соответствовать разности прямоугольных декартовых координат начала и конца этого отрезка на каждую из осей. Поэтому, чтобы понятие вектора как некоторой величины не зависело от выбора системы координат, необходимо, чтобы его компоненты менялись так же, как упомянутые разности координат.

Тогда в соответствии с законом (2.4) имеем для компонент вектора в прямоугольных декартовых координатах

$$A_i' = \alpha_{i'k} A_k .$$

Этот закон и лежит в основе аналитического определения вектора.

Вектор — это величина, определяемая в любой системе координат тремя числами (или функциями) A_i, которые при изменении пространственной системы координат преобразуются в A_i' по закону

$$A_i' = \alpha_{i'k} A_k . \tag{2.6}$$

Три величины A_i являются компонентами вектора.

Обратно, если при изменении пространственной системы координат три числа A_i изменяются по закону (2.6), то эти числа определяют вектор.

Если компоненты вектора заданы в одной системе декартовых координат (K), то, используя закон (2.6) преобразования компонент вектора, можно определить компоненты A'_i в любой другой системе, оси которой составляют с осями первой системы углы с косинусами $\alpha_{i'k}$.

Если три компоненты вектора обращаются в нуль в какой-либо системе координат (вектор равен нулю), то они равны нулю и в любой другой системе, вследствие однородности закона преобразования (2.6).

Отметим, что это определение вектора эквивалентно определению, данному ранее. Однако оно позволяет естественным образом перейти к понятию величины более высокого ранга — тензоров 2-го и высших рангов и с единой точки зрения остановиться на тензорных свойствах физических величин.

Пример. Пусть в системе (K) координаты точки x_i меняются с течением времени t, так что

$$x_i = x_i(t).$$

Тогда за время Δt точка продвинется по осям системы (K) на расстояние

$$x_i(t+\Delta t) - x_i(t).$$

Эти три величины определяют вектор (вектор перемещения точки), ибо, учитывая закон преобразования (2.3), в другой системе (K'), получим

$$x'_i(t+\Delta t) - x'_i(t) = \alpha_{i'k}\left[x_k(t+\Delta t) - x_k(t)\right].$$

Рассмотрим отношения

$$\frac{x_i(t+\Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}. \qquad (*)$$

Три таких отношения $(i = 1, 2, 3)$ составляют вектор. Действительно в системе (K') имеем:

$$\frac{x'_i(t'+\Delta t') - x'_i(t')}{\Delta t'}.$$

Поскольку $t' = t$ и $x'_i = \alpha_{i'k}x_k$, то

$$\frac{x'_i(t'+\Delta t') - x'_i(t')}{\Delta t'} = \alpha_{i'k}\,\frac{x_k(t+\Delta t) - x_k(t)}{\Delta t},$$

что и доказывает векторный характер отношений (*). Вектор (*) называется средней скоростью точки за промежуток времени Δt в системе (K).

Совокупность трех пределов (если они существуют)

$$V_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_i(t+\Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} \qquad (**)$$

также определяет вектор.

Действительно, поскольку $\alpha_{i'k}$ не зависят от t, то, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$V'_i = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{x'_i(t'+\Delta t') - x'_i(t')}{\Delta t'} = \alpha_{i'k} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_k(t+\Delta t) - x_k(t)}{\Delta t} = $$

$$= \alpha_{i'k} V_k .$$

Из этого закона преобразования пределов следует, что они определяют вектор. Вектор (**) называется истинной скоростью точки в момент времени t в системе (K).

Аналогично, определяя истинное ускорение точки в момент времени t в системе (K) как совокупность трех пределов:

$$W_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_i(t+\Delta t) - V_i(t)}{\Delta t},$$

можно установить, что они также определяют вектор.

Тогда, принимая, что во всех координатных системах выполняется второй закон Ньютона

$$m W_i = F_i ,$$

получим, что сила является векторной величиной.

2. 4. Тензоры 2-го ранга

Как уже отмечалось, некоторые геометрические объекты, а также целый ряд физических свойств, требуют для своей характеристики больше трех чисел (или функций).

Это приводит к понятию величин, тензорные свойства которых сложнее, чем у векторов и скаляров. Эти величины, тензоры 2-го ранга, не могут быть составлены в виде простого набора векторов или скаляров. Это — качественно новые величины, отвечающие физическому или геометрическому смыслу описываемых объектов.

Тензор напряжений. Рассмотрим пример, связанный с описанием напряженного состояния среды в точке, которое привело к понятию тензора напряжений.*

* Выражение «тензор напряжений» является тавтологией (tensio, лат.— напряжение).

Напряженное состояние среды в точке считается известным, если известно напряжение на любой площадке, проходящей через данную точку.

Вектор напряжения $\boldsymbol{p}$ в среде является функцией точки и ориентации, площадки, на которой рассматривается напряжение, т. е.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}),$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки, $\boldsymbol{n}$ — орт нормали к площадке. Зависимость вектора напряжения от ориентации площадки обычно отмечается индексом внизу, указывающим направление нормали к рассматриваемой площадке.

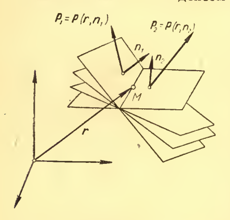


Рис. 2.3.

Напряжение в сплошной среде зависит не только от точки, но и от ориентации площадки, и потому не является однозначной функцией точки

Вектор напряжения $\boldsymbol{p}$ принципиально не годится для характеристики напряженного состояния среды в *точке*, ибо при этом надо рассматривать бесконечную совокупность $\boldsymbol{p}$ на всевозможных площадках, проходящих через точку (рис. 2.3). Оказалось возможным определить такую величину, которая является однозначной функцией точки, т. е. не зависит от ориентации площадки и в то же время позволяет вычислить напряжение на любой площадке с нормалью $\boldsymbol{n}$.

Рассмотрим вырезанный в среде у точки M элементарный тетраэдр, три ребра которого направлены по осям декартовой системы координат (рис. 2.4). Обозначим площади граней, перпендикулярных к осям (x_1), (x_2), (x_3) системы (K), соответственно через $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, а наклонной грани с нормалью $\boldsymbol{n}$ через $d\sigma_n$. Действие среды на эти грани тетраэдра выражается соответственно в напряжениях $\boldsymbol{p}_{-1}$, $\boldsymbol{p}_{-2}$, $\boldsymbol{p}_{-3}$, $\boldsymbol{p}_n$, приложенных к граням. Здесь минус в индексах у напряжений означает, что рассматриваются напря-

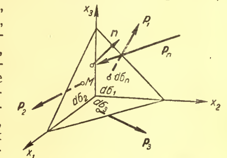


Рис. 2.4 Напряжения на гранях тетраэдра

жения на наружных сторонах граней тетраэдра, внешние нормали которых направлены противоположно осям (x_1), (x_2), (x_3). Вследствие равенства действия и противодействия, силы, действующие на внутренние стороны граней тетраэдра $(p_1 d\sigma_1,\ p_2 d\sigma_2,\ p_3 d\sigma_3)$, равны по величине и противоположны по направлению силам, действующим на наружные стороны граней. Отсюда имеем:

$$p_1 = -p_{-1};\quad p_2 = -p_{-2};\quad p_3 = -p_{-3}.$$

Если W — ускорение центра инерции тетраэдра, f — вектор массовых сил, отнесенных к единице массы, то по закону движения центра инерции тетраэдра, массу которого обозначим через dm, получим

$$W\,dm = f\,dm + p_n d\sigma_n + p_{-1} d\sigma_1 + p_{-2} d\sigma_2 + p_{-3} d\sigma_3 =$$
$$= f\,dm + p_n d\sigma_n - p_1 d\sigma_1 - p_2 d\sigma_2 - p_3 d\sigma_3.$$

В пределе, при стягивании тетраэдра к точке M, получим* (вследствие того, что члены, содержащие элемент массы, пропорциональной объему, являются малыми более высокого порядка по сравнению с членами, содержащими элемент площади):

$$p_n d\sigma_n = p_1 d\sigma_1 + p_2 d\sigma_2 + p_3 d\sigma_3 = \sum_{i=1}^{3} p_i\, d\sigma_i.$$

Поскольку

$$d\sigma_i = d\sigma_n \cos(n,\ x_i) = n_i d\sigma_n,$$

то

$$p_n = \sum_{i=1}^{3} p_i n_i \equiv p_i n_i.$$

Проекции вектора напряжения p_n на площадке с нормалью n на оси системы (K) равны:

$$p_{nk} = p_{ik} n_i.$$

Здесь p_{ik} — совокупность девяти напряжений, нормальных (при $i = k$) и касательных (при $i \neq k$) на трех взаимно перпендикулярных площадках у точки M (рис. 2.5). Эти девять величин, очевидно, никак не связаны с ориентацией площадки, на которой определяется напряжение p_n, а лишь с данной точкой среды; в то же время знание p_{ik} позволяет вычислить напряжение p_n на любой площадке, если известна ее ориентация n. В каждой точке среды однозначно определена одна физическая величина, определяемая девятью числами p_{ik}, которая и служит исчерпывающей характеристикой напряженного состояния среды в точке.

* В этих выражениях по индексу n суммирования нет.

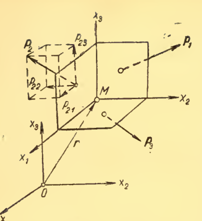


Рис. 2.5. Тензор напряжений как совокупность трех векторов напряжений p_1, p_2, p_3 на взаимно перпендикулярных площадках

Проекции этих векторов на оси представляют девять компонент тензора напряжений

Совокупность этих величин p_{ik} определяют тензор 2-го ранга, который носит название *тензора напряжений*.

Рассмотрим закон преобразования девяти величин p_{ik} при изменении системы координат.

Не ограничивая общности, можно считать, что i-я ось новой системы координат (K') направлена по нормали $\boldsymbol{n}$ (ибо при определении p_{ik} никаких ограничений на $\boldsymbol{n}$ не накладывалось). Если $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ — орты системы (K), а $\boldsymbol{i}_1'$, $\boldsymbol{i}_2'$, $\boldsymbol{i}_3'$ — орты системы (K'), то

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_i'.$$

Проекция $\boldsymbol{n}$ на l-ю ось системы (K) равна $n_l = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}_l = \boldsymbol{i}_i'\cdot\boldsymbol{i}_l = \alpha_{i'l}$, где $\alpha_{i'l}$ — косинус угла между i-й осью системы (K') и l-й осью системы (K).

Таким образом,

$$p_n \equiv p_i' = p_l n_l = \alpha_{i'l} p_l = \alpha_{i'l} i_m p_{lm}.$$

Спроектируем это равенство на k-ю ось системы (K'):

$$p_i' \cdot i_k' = \alpha_{i'l} (i_m \cdot i_k') p_{lm},$$

или

$$p_{ik}' = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} p_{lm}.$$

Таков закон преобразования девяти величин p_{ik} при изменении декартовой системы координат.

Тензор 2-го ранга. Прежде чем дать определение тензора 2-го ранга, остановимся еще на двух примерах образования этих величин.

Пусть даны два линейно зависимых вектора $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Тогда их компоненты пропорциональны:

$$A_l = \lambda B_l,$$

т. е. эти векторы коллинеарны.

В самом общем случае линейная зависимость между компонентами двух векторов, один из которых (например, $\boldsymbol{B}$) произволен, в некоторой системе (K) может быть выражена

при помощи девяти коэффициентов [мы будем их обозначать через a_{ik} $(i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$] формулами:

$$A_1 = a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + a_{13}B_3;$$
$$A_2 = a_{21}B_1 + a_{22}B_2 + a_{23}B_3;$$
$$A_3 = a_{31}B_1 + a_{32}B_2 + a_{33}B_3,$$

или сокращенно

$$A_i = a_{ik}B_k. \qquad (*)$$

В другой системе (K') будут другие компоненты у векторов и другие числа a_{ik}, так что в системе (K') имеем:

$$A'_i = a'_{ik}B'_k. \qquad (**)$$

Рассмотрим связь между числами a'_{ik} и a_{ik}.

Умножим каждое из уравнений (*) на $\alpha_{l'i}$ и просуммируем по i. Получим

$$\alpha_{l'i}A_i = a_{ik}\alpha_{l'i}B_k.$$

Тогда слева, согласно (2.6), получим l-ю компоненту вектора A в системе (K'). Таким образом,

$$A'_l = a_{ik}\alpha_{l'i}B_k.$$

Поскольку (см. 2.3)

$$B_k = \alpha_{m'k}B'_m,$$

то

$$A'_l = \alpha_{l'i}\,\alpha_{m'k}a_{ik}B'_m,$$

или, что одно и то же:

$$A' = \alpha_{i'l}\,\alpha_{k'm}\,a_{lm}B'_k.$$

Сравнивая это выражение с (**), получим в силу произвольности вектора B

$$a'_{ik} = \alpha_{i'l}\,\alpha_{k'm}a_{lm}.$$

Напомним, что справа стоит двойная сумма по l и m от 1 до 3.

Таков закон преобразования девяти чисел a_{ik} при изменении пространственной системы координат. Их совокупность, определенная в какой-либо системе координат, всегда определена и в любой другой системе.

Другой пример.

Из компонент двух зависимых векторов A и B можно составить девять произведений вида

$$A_iB_k \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3).$$

При переходе к другой системе координат (K') эти произведения будут иметь другие значения. Выразим их через старые значения. Это всегда можно сделать, ибо мы знаем закон преобразования компонент векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Используя (2.6), получим

$$A'_i B'_k = \alpha_{i'l} A_l \, \alpha_{k'm} B_m = \alpha_{i'l} \, \alpha_{k'm} A_l B_m.$$

Таким образом, величины $A_i B_k$ преобразуются при изменении системы координат по тому же закону, что и числа a_{ik} из предыдущего примера.

Величины a_{ik}, $A_i B_k$ представляют примеры тензоров второго ранга.

Тензор 2-го ранга — это величина, определяемая в любой системе координат девятью числами (или функциями) A_{ik}, которые при изменении системы координат преобразуются в A'_{ik} по закону

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l} \, \alpha_{k'm} A_{lm}. \tag{2.7}$$

Величины A_{ik} являются компонентами тензора 2-го ранга.

Если компоненты (A_{ik}) тензора заданы в одной декартовой прямоугольной системе координат, то по формуле (2.7) можно определить компоненты (A'_{ik}) тензора в любой другой декартовой прямоугольной системе, оси которой составляют с осями первоначальной системы углы с косинусами $\alpha_{i'k}$.

Если все компоненты тензора обращаются в нуль в какой-либо системе координат, то они равны нулю в любой другой системе вследствие однородности закона преобразования (2.7).

Иногда удобно записывать тензор в виде таблицы (матрицы):

$$\| A_{ik} \| = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix}. \tag{2.8}$$

Рассмотрим несколько примеров, из которых видно, как некоторые геометрические и физические объекты требуют для своего описания тензоров 2-го ранга.

Пример 1. Пусть x_i — компоненты вектора, направленного из центра поверхности 2-го порядка, находящегося в начале системы декартовых координат, к точкам этой поверхности. Тогда уравнение поверхности имеет вид

$$A_{ik} x_i x_k = 1.$$

Числа A_{ik} полностью определяют эту поверхность, причем $A_{ik} = A_{ki}$.

Если (K') — система, повернутая относительно (K) на углы с конусами $\alpha_{i'k}$, то

$$x'_i = \alpha_{i'k} x_k.$$

Уравнение поверхности в системе (K') имеет вид

$$A'_{ik} x'_i x'_k = 1.$$

Из закона преобразования величин x_i, находим

$$A_{lm} x_l x_m = A_{lm} \alpha_{i'l} x'_i \alpha_{k'm} x'_k = (A_{lm} \alpha_{i'l} \alpha_{k'm}) x'_i x'_k = 1.$$

Сравнивая эту формулу с предыдущей, получим закон преобразования девяти величин A_{ik}:

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} A_{lm},$$

из которого заключаем, что величины A_{ik} образуют тензор 2-го ранга.

Пример 2. *Тензор моментов инерции.*

Вектор момента количества движения системы материальных точек относительно начала координат некоторой системы координаты (K) равен

$$\boldsymbol{L} = \sum_{n=1}^{N} m_n (\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{V}_n).$$

Здесь m_n — масса n-й точки, $\boldsymbol{r}_n$ — ее радиус-вектор, $\boldsymbol{V}_n$ — ее скорость.

Если расстояния $\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_p$ между точками не меняются (система представляет твердое тело) и если их расстояния до начала координат также неизменны (твердое тело имеет неподвижную точку в начале координат), то по формуле Эйлера (см. задачу 12, гл. 1) их скорости могут быть выражены через мгновенную угловую скорость системы ω:

$$\boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_n.$$

Тогда, учитывая (1.19), получим

$$\boldsymbol{L} = \sum_{n=1}^{N} m_n [\boldsymbol{r}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_n)] = \sum_{n=1}^{N} m_n [\boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{r}_n \cdot \boldsymbol{r}_n) - \boldsymbol{r}_n (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_n)],$$

или в проекциях ($x_i^{(n)}$ — координаты n-й точки)

$$L_i = \sum_{n=1}^{N} m_n (\omega_i x_l^{(n)} x_l^{(n)} - x_i^{(n)} \omega_k x_k^{(n)}).$$

Представив $\omega_i \equiv \delta_{ik} \omega_k$, запишем

$$L_i = \omega_k \sum_{n=1}^{N} m_n (\delta_{ik} x_l^{(n)} x_l^{(n)} - x_i^{(n)} x_k^{(n)}) = \omega_k I_{ik},$$

где

$$I_{ik} = \sum_{n=1}^{N} m_n \left(\delta_{ik} x_l^{(n)} x_l^{(n)} - x_i^{(n)} x_k^{(n)} \right). \qquad (2.9)$$

Девять величин I_{ik} выражаются через моменты инерции $I_{x_1x_1}$, $I_{x_1x_2}, \ldots$, следующим образом:

$$I_{11} = \sum_{n=1}^{N} m_n \left[(x_2^{(n)})^2 + (x_3^{(n)})^2 \right] = I_{x_1x_1};$$

$$I_{22} = \sum_{n=1}^{N} m_n \left[(x_1^{(n)})^2 + (x_3^{(n)})^2 \right] = I_{x_2x_2};$$

$$I_{33} = \sum_{n=1}^{N} m_n \left[(x_1^{(n)})^2 + (x_2^{(n)})^2 \right] = I_{x_3x_3};$$

$$I_{12} = I_{21} = -\sum_{n=1}^{N} m_n x_1^{(n)} x_2^{(n)} = -I_{x_1x_2};$$

$$I_{13} = I_{31} = -\sum_{n=1}^{N} m_n x_1^{(n)} x_3^{(n)} = -I_{x_1x_3};$$

$$I_{23} = I_{32} = -\sum_{n=1}^{N} m_n x_2^{(n)} x_3^{(n)} = -I_{x_2x_3}.$$

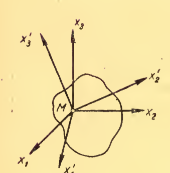


Рис. 2.6. Каждой точке твердого тела можно сопоставить тензор моментов инерции

Покажем, что девять величин I_{ik} являются компонентами тензора 2-го ранга. Этот тензор называется *тензором моментов инерции* системы.

В какой-либо другой системе (K') прямоугольных декартовых координат моменты инерции имеют вид (рис. 2.6)

$$I'_{ik} = \sum_{n=1}^{N} m_n \left(\delta'_{ik} x_l'^{(n)} x_l'^{(n)} - x_i'^{(n)} x_k'^{(n)} \right).$$

Рассмотрим закон преобразования I_{ik} в I'_{ik} при изменении системы координат.

Из закона преобразования векторов имеем:

$$x_l'^{(n)} x_l'^{(n)} = x_l^{(n)} x_l^{(n)};$$

$$x_i'^{(n)} x_k'^{(n)} = \alpha_{i's} \alpha_{k'r} x_s^{(n)} x_r^{(n)}.$$

Из определения величин δ_{ik} получим, что в системе (K) $\alpha_{l'i}\alpha_{l'k} = \delta_{ik}$, а в системе (K') — $\alpha_{l's}\alpha_{k's} = \delta'_{ik}$ (см. 2.5).

Учитывая, что $\alpha_{k's} = \alpha_{k'r}\delta_{sr}$, получим

$$\delta'_{ik} = \alpha_{l's}\alpha_{k'r}\delta_{sr} . \tag{2.10}$$

Таким образом, вследствие независимости $\alpha_{l'k}$ от координат, имеем:

$$I'_{ik} = \sum_{n=1}^{N} m_n \left(\alpha_{l's}\alpha_{k'r}\delta_{sr} x_l^{(n)} x_l^{(n)} - \alpha_{'s}\alpha_{k'r} x_s^{(n)} x_r^{(n)}\right) =$$

$$= \alpha_{l's}\alpha_{k'r} \sum_{n-1}^{N} m_n \left(\delta_{sr} x_l^{(\imath)} x_l^{(n)} - x_s^{(n)} x_r^{(n)}\right) = \alpha_{l's}\alpha_{k'r} I_{rs} .$$

Это доказывает, что девять величин I_{ik} образуют тензор 2-го ранга.

Закон преобразования (2.10) показывает, что величины δ_{ik} также образуют тензор 2-го ранга. Вследствие его особого строения он носит название единичного тензора. Его матрица имеет вид

$$\|\delta_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} .$$

Пример 3. *Тензор деформаций.* Рассмотрим в упругом теле две произвольные точки A и B, которые в результате деформации тела заняли положение A' и B'. При этом до деформации их радиусы-векторы были равны (см. рис. 2.7) $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$, а после деформации $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r})$. Векторы $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r})$ называются векторами смещения (точек A и B).

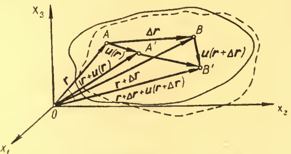


Рис. 2.7. Деформация упругого тела

Относительный радиус-вектор точек до деформации был $\Delta\boldsymbol{r}$, после деформации стал равным $\Delta\boldsymbol{r}'$. Вычислим изменение его величины в результате деформации, т. е. определим раз-

ность $(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2$. При этом мы предположим, что вектор смещения $\boldsymbol{u}$ является непрерывной функцией точки, т. е. $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$. Из рис. 2.7 имеем:

$$\Delta \boldsymbol{r}' = \Delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}),$$

или в проекциях

$$\Delta x_i' = \Delta x_i + u_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - u_i(x_1, x_2, x_3).$$

Пренебрегая малыми второго порядка, получим

$$\Delta x_i' = \Delta x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k.$$

Возводя в квадрат и замечая, что $\Delta x_i' \Delta x_i' = (\Delta r')^2$ и $\Delta x_i \Delta x_i = (\Delta r)^2$, получим

$$(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2 = 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \Delta x_k \Delta x_l.$$

Меняя индексы суммирования i и l во второй сумме и записывая первую сумму в виде

$$2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k =$$

$$= \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \Delta x_k \Delta x_i,$$

получим

$$(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) \Delta x_i \Delta x_k = 2 u_{ik} \Delta x_i \Delta x_k,$$

где

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right).$$

Итак, изменение расстояния между любыми двумя точками целиком определяется, если известны девять величин u_{ik}.

Покажем, что u_{ik} образуют тензор 2-го ранга. Этот тензор называется *тензором деформаций*.

В другой координатной системе (K') имеем:

$$u_{ik}' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k'} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_i'} + \frac{\partial u_l'}{\partial x_k'} \frac{\partial u_l'}{\partial x_i'} \right).$$

Используя формулу (2.6) для преобразования компонент вектора $\boldsymbol{u}$ и формулы (2.3), получим

$$u_{ik}' = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_n} (\alpha_{i'm} u_m) \frac{\partial x_n}{\partial x_k'} + \frac{\partial}{\partial x_m} (\alpha_{k'n} u_n) \frac{\partial x_m}{\partial x_i'} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_n} (\alpha_{l's} u_s) \frac{\partial x_n}{\partial x_k'} \frac{\partial}{\partial x_m} (\alpha_{l's} u_s) \frac{\partial x_m}{\partial x_i'} \right] =$$

$$= \alpha_{i'm} \alpha_{k'n} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_s}{\partial x_n} \frac{\partial u_s}{\partial x_m} \right] = \alpha_{i'm} \alpha_{k'n} u_{mn} .$$

Эта формула преобразования u_{mn} в u'_{ik} при изменении системы координат и доказывает, что величины u_{ik} являются компонентами тензора 2-го ранга.

Обычно в линейной теории упругости пренебрегают членом $\frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i}$ и тогда

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Пример 4. *Тензор скоростей деформаций.*

Согласно теореме Гельмгольца *, на выводе которой мы здесь останавливаться не будем, движение частицы жидкости или газа можно разложить на квазитвердое движение (движение частицы, как частицы твердого тела) и деформационное движение. Причем деформационное движение определяется тензором скоростей деформации

$$V_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right), \tag{2.11}$$

в том смысле, что скорость точки M частицы по отношению к точке O, являющаяся исключительно следствием способности частицы деформироваться (деформационная скорость), равна (см. рис. 2.8)

$$V_i^{д}(M) = V_{ik}(O) \Delta x_k, \tag{2.12}$$

где $\Delta r = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2}$ — расстояние между точками M и O;

$V^{д}(M)$ — деформационная скорость частицы в точке M;

$V_{ik}(O)$ — значение тензора V_{ik} в точке O.

Нетрудно проверить, что девять величин V_{ik} образуют тензор 2-го ранга (см. предыдущий пример).

Остановимся подробнее на физическом смысле компонент тензора скоростей деформации.

В частице жидкости (рис. 2.9) отметим две точки: A и B — до деформации частицы: после деформации, совершившейся за время Δt, положение этих точек пусть будет A' и B'. Положение точек A и B по отношению к точке O до дефор-

---

*) См. Л. Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа, М. ГИТТЛ, 1957, стр. 48–51.



Рис. 2.8. Скорость деформации жидкой частицы

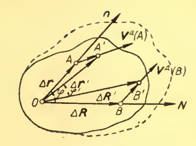


Рис. 2.9. Деформация жидкой частицы

мации определим соответственно радиусами-векторами Δr и $\Delta \boldsymbol{R}$, а после деформации — радиусами-векторами $\Delta \boldsymbol{r}'$ и $\Delta \boldsymbol{R}'$. Изменение длин векторов $\Delta \boldsymbol{r}$, $\Delta \boldsymbol{R}$ и угла между ними характеризуют деформацию частицы.

Смещения точек A (вектор $\overline{AA'}$) и B (вектор $\overline{BB'}$) в результате деформации частицы совершились по направлению деформационных скоростей этих точек $\boldsymbol{V}^{\text{д}}(A)$ и $\boldsymbol{V}^{\text{д}}(B)$. Поэтому

$$\overline{AA'} = \boldsymbol{V}^{\text{д}}(A)\,\Delta t;$$

$$\overline{BB'} = \boldsymbol{V}^{\text{д}}(B)\,\Delta t.$$

Тогда из векторных треугольников OOA' и OBB' имеем:

$$\Delta \boldsymbol{r}' = \Delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{V}^{\text{д}}(A)\,\Delta t;$$

$$\Delta \boldsymbol{R}' = \Delta \boldsymbol{R} + \boldsymbol{V}^{\text{д}}(B)\,\Delta t.$$

Выражая деформационные скорости через тензор скоростей деформации по (2.12) и переходя к компонентам, отсюда получим:

$$\Delta x_i' = \Delta x_i + V_{ik}\Delta x_k \Delta t;$$

$$\Delta X_i' = \Delta X_i + V_{ik}\Delta X_k \Delta t.$$

Здесь Δx_i — i-я компонента радиуса-вектора $\Delta \boldsymbol{r}$, аналогично $\Delta x_i'$, ΔX_i, $\Delta X_i'$ — i-е компоненты радиусов-векторов $\Delta \boldsymbol{r}'$, $\Delta \boldsymbol{R}$, $\Delta \boldsymbol{R}'$. Значения производных в V_{ik} берутся для точки O.

Составим скалярное произведение $\Delta \boldsymbol{r}' \cdot \Delta \boldsymbol{R}'$, учитывая симметричность тензора V_{ik}, т. е. $V_{ik} = V_{ki}$. Получим с точностью до членов первого порядка малости относительно Δt:

$$\Delta \boldsymbol{r}' \cdot \Delta \boldsymbol{R}' = \Delta x_i' \cdot \Delta X_i' = \Delta x_i \Delta X_i + 2V_{ik}\Delta x_k \Delta X_i \Delta t. \qquad (2.13)$$

Теперь охарактеризуем деформацию частицы.

Пусть $\boldsymbol{n}$ — орт вектора $\Delta \boldsymbol{r}$, а $\boldsymbol{N}$ — орт вектора $\Delta \boldsymbol{R}$, т. е.

$$\boldsymbol{n} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{|\Delta \boldsymbol{r}|} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta r}; \quad \boldsymbol{N} = \frac{\Delta \boldsymbol{R}}{|\Delta \boldsymbol{R}|} = \frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta R}.$$

По определению, относительное удлинение частицы (за время Δt) в направлении $\boldsymbol{n}$ равно

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta r' - \Delta r}{\Delta r} = \frac{\Delta r'}{\Delta r} - 1,$$

а скорость относительного удлинения в том же направлении равна

$$\dot{\varepsilon}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r' - \Delta r}{\Delta r \Delta t}.$$

Пусть φ — угол между векторами $\Delta \boldsymbol{r}$ и $\Delta \boldsymbol{R}$ до деформации, а φ' — после деформации частицы.

Величины $\dot{\varepsilon}_n$ характеризуют скорости линейной деформации частицы, а величины $\dot{\gamma} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi - \varphi'}{\Delta t}$ — скорости угловой деформации частицы.

Разделив (2.13) на $\Delta r \Delta R$, получим

$$(1 + \varepsilon_n)(1 + \varepsilon_N) \cos \varphi' = \cos \varphi + 2 V_{lk} n_k N_l \Delta t,$$

ибо

$$\frac{\Delta x_l' \Delta X_l'}{\Delta r \Delta R} = \frac{\Delta r' \Delta R' \cos \varphi'}{\Delta r \Delta R};$$

$$n_k = \frac{\Delta x_k}{\Delta r}; \quad N_k = \frac{\Delta X_k}{\Delta R}.$$

Оставляя в полученном выражении члены первого порядка малости относительно ε, получим

$$(1 + \varepsilon_n + \varepsilon_N) \cos \varphi' = \cos \varphi + 2 V_{lk} n_k N_l \Delta t. \qquad (2.14)$$

Рассмотрим частные случаи этого соотношения.

1. Пусть точка A совпадает с точкой B и лежит на оси (x_1) до деформации. Тогда

$$\varphi = \varphi' = 0;$$

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta \boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}_1 \Delta x_1:$$

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{N} = \boldsymbol{i}_1 \quad (N_1 = n_1 = 1;\ N_2 = N_3 = n_2 = n_3 = 0).$$

Из (2.14) в этом случае получаем

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 1 + 2 V_{11} \Delta t,$$

отсюда

$$\dot{\varepsilon}_1 = V_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}.$$

Выбрав точки A и B до деформации, совпадающими вначале на оси (x_2), а затем на оси (x_3), получим последовательно:

$$\dot{\varepsilon} = V_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2}; \quad \dot{\varepsilon}_3 = V_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial x_3}.$$

Итак, диагональные компоненты тензора скоростей деформаций (V_{11}, V_{22}, V_{33}) представляют собой скорости относительного удлинения частицы вдоль трех координатных осей.

2. Пусть точка A лежит до деформации на оси (x_1), а точка B — на оси (x_2).

Тогда

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad n = i_1; \quad N = i_2; \quad \Delta r \perp \Delta R.$$

Из (2.14) в этом случае получим

$$(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cos \varphi' = 2 V_{12} \Delta t. \tag{2.15}$$

Обозначим $\gamma_{12} = \varphi - \varphi'$ — изменение прямого угла в частице между отрезками, направленными до деформации вдоль осей (x_1) и (x_2). Тогда, рассматривая малые величины γ_{12}, получим

$$\gamma_{12} \approx \sin \gamma_{12} = \sin (\varphi - \varphi') = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi' \right) = \cos \varphi'.$$

Отбрасывая в (2.15) величины 2-го порядка малости, получим

$$\gamma_{12} = 2 V_{12} \Delta t.$$

Отсюда

$$\dot{\gamma}_{12} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi - \varphi'}{\Delta t} = 2 V_{12} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1}.$$

Совершенно аналогично можно получить

$$\dot{\gamma}_{13} = \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} = 2 V_{13};$$

$$\dot{\gamma}_{23} = \frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} = 2 V_{23}. \tag{2.16}$$

Итак, *недиагональные компоненты тензора скоростей деформаций ($V_{12} = V_{21}$, $V_{13} = V_{31}$, $V_{23} = V_{32}$) представляют собой половину скоростей изменения углов между отрезками, направленными до деформации по соответствующим осям, или, короче, половину скоростей угловой деформации частицы.*

2.5. Тензоры высших рангов

Выпишем законы преобразования компонент тензоров нулевого, первого и второго рангов.

$$\varphi' = \varphi; \quad A'_i = \alpha_{i'l} A_l; \quad A'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} A_{lm}.$$

Формула преобразования скаляров не содержит коэффициентов $\alpha_{i'k}$; в формулу преобразования компонент вектора

коэффициенты $\alpha_{i'k}$ входят линейно (однородная функция первой степени относительно $\alpha_{i'k}$); формула преобразования компонент тензора 2-го ранга является уже однородной функцией второй степени относительно $\alpha_{i'k}$.

Как обобщение, можно дать определение тензора n-го ранга.

Тензор n-го ранга — это величина, определяемая в каждой системе декартовых координат совокупностью 3^n чисел (или функций) $A_{ikl}\ldots$ (n — число индексов), которые при изменении системы координат преобразуются по закону

$$A'_{ikl\ldots} = \alpha_{i'p}\alpha_{k'r}\alpha_{l's}\ldots A_{prs\ldots}. \qquad (2.17)$$

Сумма справа является однородным многочленом (формой) степени n относительно косинусов углов $\alpha_{i'k}$*. $A_{ikl}\ldots$ — компоненты тензора. Если они все равны нулю в какой-то системе координат, то тензор тождественно равен нулю.

Рассмотрим несколько примеров тензоров высших рангов.

Пример 1. Если $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ — три вектора, то $3^3 = 27$ величин

$$D_{ikl} = A_i B_k C_l$$

составляют тензор 3-го ранга.

Доказательство этого факта предоставляется читателю.

Пример 2. Пусть A_{ik} и B_{ik} — два тензора второго ранга, один из которых (например, B_{ik}) произволен, и пусть между компонентами этих тензоров существует линейная зависимость. Эту линейную зависимость можно записать в виде

$$A_{ik} = \lambda_{iklm} B_{lm},$$

где λ_{iklm} — совокупность $3^4 = 81$ коэффициентов.

Можно показать, на основании закона преобразования A_{ik} и B_{ik}, что λ_{iklm} образуют тензор 4-го ранга, т. е.

$$\lambda'_{iklm} = \alpha_{i'n}\alpha_{k'p}\alpha_{l'r}\alpha_{m's}\lambda_{nprs}.$$

Доказательство можно провести аналогично примеру 1 предыдущего параграфа.

---

* Формами переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются выражения: $C_i x_i \left(\equiv \sum_{i=1}^{n} C_i x_i\right)$ — 1-й степени, $C_{ik} x_i x_k \left(\equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{ik} x_i x_k\right)$ — 2-й степени, $C_{ikl} x_i x_k x_l \left(\equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} C_{ikl} x_i x_k x_l\right)$ — 3-й степени и т. д.

2.6. Преобразование компонент векторов и тензоров при повороте координатной плоскости вокруг перпендикулярной оси

Иногда приходится рассматривать частный случай преобразования координат — поворот системы вокруг одной из координатных осей. Если векторы или тензоры заданы в плоскости, то такое преобразование является единственно возможным и определяется одним параметром. Выберем в качестве параметра угол φ, который составляет новая ось (x') со старой осью (x), когда поворот координатной системы совершается вокруг оси (z) (рис. 2.10). Тогда из общих формул (2.3) следует:

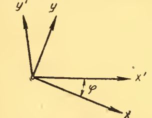


Рис. 2.10. Поворот осей координат

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z' &= z. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда для комплексного числа $x+iy$, определяющего радиус-вектор, расположенный в плоскости (xy), получим формулу преобразования следующего вида:

$$x' + iy' = (x+iy)\,e^{i\varphi},$$

а для сопряженного комплексного числа $x - iy$ — формулу

$$x' - iy' = (x-iy)\,e^{-i\varphi}.$$

Если задан вектор $A(A_x, A_y, A_z)$, то получим следующие формулы преобразования для величин $A_x + iA_y$, $A_x - iA_y$, A_z:

$$\left.\begin{aligned} A'_x + iA'_y &= (A_x + iA_y)\,e^{i\varphi}, \\ A'_x - iA_y &= (A_x - iA_y)\,e^{-i\varphi}, \\ A'_z &= A_z. \end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A_x + iA_y &= A_{+1}, \\ A_x - iA_y &= A_{-1}, \\ A_z &= A_0. \end{aligned}$$

Тогда формулы преобразования (2.18) можно записать коротко в виде

$$A'_\alpha = A_\alpha\, e^{i\alpha\varphi} \text{ (по } \alpha \text{ не суммировать!)},$$

где α принимает значения $-1, 0, +1$.

В случае $A_z = 0$ вектор целиком лежит в плоскости (xy) и его компоненты преобразуются также согласно (2.18).

Эти формулы можно получить и иначе, если записать комплексные числа через модуль и аргумент:

$$A_{+1} = Ae^{i\gamma}; \quad A_{-1} = Ae^{-i\gamma}.$$

При повороте осей на угол φ у комплексных величин меняется аргумент; новый аргумент γ' равен

$$\gamma' = \gamma + \varphi.$$

Тогда

$$A'_{+1} = Ae^{i\gamma'} = Ae^{i\gamma} e^{i\varphi} = A_{+1} e^{i\varphi},$$
$$A'_{-1} = Ae^{-i\gamma'} = Ae^{-i\gamma} e^{-i\varphi} = A_{-1} e^{-i\varphi}.$$

Если задано два вектора $A(A_x, A_y, A_z)$ и $B(B_x, B_y, B_z)$, то справедливы формулы преобразования:

$$A'_\alpha = A_\alpha e^{i\alpha\varphi}, \quad B'_\alpha = B_\alpha e^{i\alpha\varphi} \text{ (по } \alpha \text{ не суммировать!).}$$

Тогда для величин $A_\alpha B_\beta$ устанавливаются следующие формулы:

$$A'_\alpha B'_\beta = A_\alpha B_\beta e^{i(\alpha+\beta)\varphi} \text{ (по } \alpha \text{ и } \beta \text{ не суммировать!),} \tag{2.19}$$

где индексы α, β могут принимать порознь одно из значений: $-1, 0, +1$.

При этом величины $A_\alpha B_\beta$ связаны с компонентами векторов следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
A_0B_0 &= A_zB_z;\\
A_{+1}B_{+1} &= (A_x + iA_y)(B_x + iB_y) = A_xB_x - A_yB_y + \\
&\quad + i(A_xB_y + A_yB_x);\\
A_{-1}B_{-1} &= (A_x - iA_y)(B_x - iB_y) = A_xB_x - A_yB_y - \\
&\quad - i(A_xB_y + A_yB_x);\\
A_0B_{+1} &= A_z(B_x + iB_y) = A_zB_x + iA_zB_y;\\
A_0B_{-1} &= A_z(B_x - iB_y) = A_zB_x - iA_zB_y;\\
A_{+1}B_0 &= (A_x + iA_y)B_z = A_xB_z + iA_yB_z;\\
A_{-1}B_0 &= (A_x - iA_y)B_z = A_xB_z - iA_yB_z;\\
A_{+1}B_{-1} &= (A_x + iA_y)(B_x - iB_y) = A_xB_x + A_yB_y - \\
&\quad - i(A_xB_y - A_yB_x);\\
A_{-1}B_{+1} &= (A_x - iA_y)(B_x + iB_y) = A_xB_x + A_yB_y + \\
&\quad + i(A_xB_y - A_yB_x).
\end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Из формулы (2.19) следуют формулы преобразования величин $A_\alpha B_\beta$, представляющие некоторые комбинации компонент векторов A и B. Так, в частности, при $\alpha = +1$, $\beta = -1$ получим

$$A'_{+1} B'_{-1} = A_{+1}B_{-1}$$

или

$$A'_xB'_x + A'_yB'_y - i(A'_xB'_y - A'_yB'_x) = A_xB_x + A_yB_y - i(A_xB_y - A_yB_x).$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получим:

$$A'_xB'_x + A'_yB'_y = A_xB_x + A_yB_y$$
$$A'_xB'_y - A'_yB'_x = A_xB_y - A_yB_x.$$

Первое из этих соотношений совместно с $A'_zB'_z = A_zB_z$, получающимся из (2.19) при $\alpha = \beta = 0$, означает, что скалярное произведение векторов при данном преобразовании остается неизменным, как и при любом преобразовании координат.

Второе соотношение выражает неизменность проекции векторного произведения $A \times B$ на ось (z). Это можно было предвидеть, ибо при рассматриваемом преобразовании координат ось (z) остается неизменной.

Аналогичные выводы получим, рассматривая случай $\alpha = -1$, $\beta = +1$.
Теперь рассмотрим симметричный тензор второго ранга с компонентами $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy} = p_{yx}, p_{zx} = p_{xz}, p_{yz} = p_{zy}$.

Если $p_{zz} = p_{zx} = p_{zy} = 0$, то о таком тензоре говорят, что он задан на плоскости (xy). Таким тензором полностью описывается плоское напряженное состояние упругого тела, когда напряжения в теле не зависят от координаты z и все векторы напряжений дают на ось (z) проекцию, равную нулю.

Из компонент этого тензора построим величины $p_{\alpha\beta}$ аналогично (2.20):

$$p_{+1+1} = p_{xx} - p_{yy} + 2ip_{xy}; \qquad p_{00} = p_{zz};$$
$$p_{-1-1} = p_{xx} - p_{yy} - 2ip_{xy}; \qquad p_{0+1} = p_{+10} = p_{xz} + ip_{yz};$$
$$p_{+1-1} = p_{xx} + p_{yy} = p_{-1+1}; \qquad p_{0-1} = p_{-10} = p_{xz} - ip_{yz}.$$

Тогда, применяя формулы преобразования компонент тензора второго ранга в рассматриваемом случае плоского вращения системы вокруг оси (z) можно получить следующую удобную формулу преобразования величин $p_{\alpha\beta}$:

$$p'_{\alpha\beta} = e^{i(\alpha+\beta)\varphi} p_{\alpha\beta} \text{ (по } \alpha \text{ и } \beta \text{ не суммировать!).}$$

Формула такой же структуры справедлива и для плоского тензора любого ранга, т. е.

$$p'_{\alpha\beta\gamma\ldots} = e^{i(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)} p_{\alpha\beta\gamma\ldots} \tag{2.21}$$

(по α, β, γ, ... не суммировать!),

причем величины $p_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ связаны с компонентами тензора так же, как величины $A_\alpha B_\beta C_\gamma \ldots$ связаны с компонентами векторов A, B, C, ..., а α, β, γ... могут принимать значения $+1, 0, -1$.

Из этой общей формулы (2.21) имеем:

$$p'_{+1-1} = p_{+1-1} \qquad p'_{00} = p_{00}$$
$$p'_{+1+1} = e^{2i\varphi} p_{+1+1} \qquad p'_{0+1} = e^{i\varphi} p_{0+1}$$
$$p'_{-1-1} = e^{-2i\varphi} p_{-1-1} \qquad p'_{0-1} = e^{-i\varphi} p_{0-1}$$

или, расписав, получим:

$$p'_{xx} + p'_{yy} = p_{xx} + p_{yy};$$
$$p'_{xx} - p'_{yy} + 2ip'_{xy} = (p_{xx} - p_{yy} + 2ip_{xy}) e^{2i\varphi};$$
$$p'_{xx} - p'_{yy} - 2ip'_{xy} = (p_{xx} - p_{yy} - 2ip_{xy}) e^{-2i\varphi};$$
$$p'_{zz} = p_{zz};$$
$$p'_{xz} + ip'_{yz} = (p_{xz} + ip_{yz}) e^{i\varphi};$$
$$p'_{xz} - ip'_{yz} = (p_{xz} - ip_{yz}) e^{-i\varphi}.$$

Первые три формулы широко известны и имеют большое значение в плоской задаче теории упругости *. Из этих формул, записав $e^{2i\varphi} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$ и отделяя мнимые и действительные части, получим выражения

* См. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости, гл. 1, § 8, АН СССР, 1954.

для p'_{xx}, $-p'_{yy}$ и p'_{xy} через старые компоненты. Комбинируя эти выражения, получим:

$$p'_{xx} = \frac{p_{xx} + p_{yy}}{2} + \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \cos 2\varphi - p_{xy} \sin 2\varphi;$$

$$p'_{yy} = \frac{p_{xx} + p_{yy}}{2} - \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \cos 2\varphi + p_{xy} \sin 2\varphi;$$

$$p'_{xy} = \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \sin 2\varphi + p_{xy} \cos 2\varphi.$$

2.7. Инвариантность тензорных уравнений

Закон преобразования тензоров при изменении системы координат связан с понятием *инвариантности* уравнений относительно координат.

Под инвариантностью уравнения обычно понимается неизменяемость его вида при переходе от одной системы координат к другой.

Преобразование координат сопровождается преобразованием функций по закону, вполне определенному для каждой функции: для скалярной функции один закон, для векторной — другой и т. д.

Сопоставляется начальный, до преобразования координат, вид уравнения с конечным видом его, после преобразования координат. Вообще говоря, новые, преобразованные функции будут удовлетворять новому уравнению, описывающему то же самое явление в новой системе координат. Если это новое уравнение имеет такой же вид в новых координатах, как и первоначальное уравнение в старых координатах, то такое уравнение называется *инвариантным*.

Инвариантность уравнений, описывающих тот или иной физический закон, является их непременным свойством, ибо закон должен иметь одну и ту же формулировку в любой системе координат вследствие однородности и изотропности реального пространства.

Для инвариантности уравнений необходимо, чтобы все тензоры, которые входят в виде слагаемых в это уравнение, были тензорами одного ранга.

Вектор не может быть сложен со скаляром, тензор 2-го ранга — с вектором и т. п.

Это положение имеет такой же универсальный характер, как и положение об одинаковой размерности слагаемых в уравнениях.

Уравнение прямой в системе декартовых координат имеет вид (см. задачу 7, гл. 1).

$$x_k - a_k - \lambda e_k = 0.$$

Умножим каждое из этих уравнений на $\alpha_{i'k}$ и просуммируем по k:

$$\alpha_{i'k} x_k - \alpha_{i'k} a_k - \lambda \alpha_{i'k} e_k = 0.$$

Так как x_i, a_i, e_i — компоненты векторов то, вспоминая закон (2.6), получим уравнение прямой в системе (K'):

$$x'_i - a'_i - \lambda e'_i = 0,$$

где x'_i, a'_i, e'_i — компоненты векторов в новой системе координат (K'). Уравнение прямой инвариантно, ибо все слагаемые в нем — векторы — тензоры одного ранга.

Второй закон Ньютона имеет одинаковую силу в любой из декартовых систем координат*. Следовательно, его формулировка должна быть инвариантна. Инвариантность обеспечивается тем, что скорость и сила — вектор, а время и масса (вообще, переменная) — скаляры.

Имеем в системе (K):

$$\frac{d}{dt}(mV_i) = F_i.$$

В системе (K') получаем совершенно аналогичную запись

$$\frac{d}{dt}(mV'_i) = F'_i$$

в силу того, что

$$m = m' \quad V'_i = \alpha_{i'k} V_k;$$
$$t = t' \quad F'_i = \alpha_{i'k} F_k.$$

Инвариантностью обладают все правильно сформулированные физические законы.

2.8. Криволинейные координаты

Координатные поверхности и линии. Положение точки M в пространстве, как было сказано, можно определить ее радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$, относительно некоторой фиксированной точки O. Этот вектор, не зависящий, конечно, от выбранной системы координат, в пространстве трех измерений определяется тремя числами q^1, q^2, q^3 (числа 1, 2, 3 — индексы, а не степени), которые уже зависят от устанавливаемого способа определения их, т. е. от принятой системы координат.

Несколько обобщая сказанное в 1.3 относительно координат на плоскости, можно условиться, например, эти три

---

* Здесь справедливо более общее положение: закон Ньютона справедлив и имеет силу и одинаковую формулировку во всех инерциальных системах (движущихся равномерно и прямолинейно друг относительно друга).

числа определять как расстояния, с соответствующими знаками, до трех взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящих через точку O, положив $q^1 = x_1$, $q^2 = x_2$, $q^3 = x_3$, и тогда говорят о прямоугольной декартовой системе координат.

Если положение точки M определять координатой z по оси, проходящей через точку O, расстоянием R точки от оси и углом φ между фиксированной полуплоскостью, проходящей через ось z, и полуплоскостью, проведенной через z и точку M, то получится цилиндрическая система координат z, R, φ (рис. 1.9, *а*).

Очевидно, если сохранять для одной из величин q^i например, q^1 постоянные значения

$$q^1 = \text{const}$$

и изменять непрерывно две другие q^2 и q^3, то полученные точки будут принадлежать некоторому семейству поверхностей.

Таким же образом, уравнения $q^2 = \text{const}$ (q^1, q^3 — переменные) и $q^3 = \text{const}$ (q^1, q^2 — переменные) определяют, соответственно, еще два других семейства поверхностей. Положим, что эти поверхности таковы, что через каждую точку M пространства проходит одна и только одна поверхность каждого семейства. Тогда положение точки вполне однозначно определяется пересечением этих трех поверхностей. Они носят название координатных поверхностей, а величины q^1, q^2, q^3 *криволинейных (обобщенных) координат точки М.*

Вид координатных поверхностей зависит, конечно, от способа определения величин q^i (рис. 2.11).

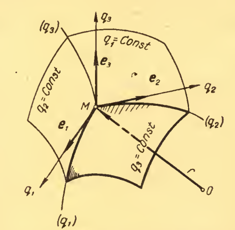


Рис. 2.11. Координатные поверхности, линии и оси в обобщенной координатной системе

В прямоугольной системе координат, как легко видеть, координатными поверхностями являются три взаимно перпендикулярные плоскости.

В цилиндрической системе координат, координатные поверхности суть: $z = \text{const}$ — плоскость, перпендикулярная оси z; $R = \text{const}$ — круговой цилиндр радиуса R с образующими параллельными оси z; $\varphi = \text{const}$ — полуплоскость,

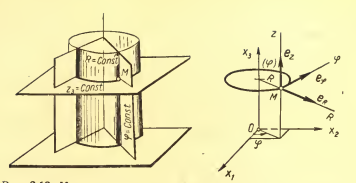


Рис. 2.12. Цилиндрическая система координат: координатные поверхности; координатные линии (φ, R, Z) и базис их осей

проходящая через ось z под углом φ к фиксированной полуплоскости (рис. 2.12).

В сферической системе координат R, θ, φ (см. рис. 2.13), координатными поверхностями служат полуплоскость, проходящая под углом φ через ось z, сфера радиуса R и конус с углом раствора 2θ.

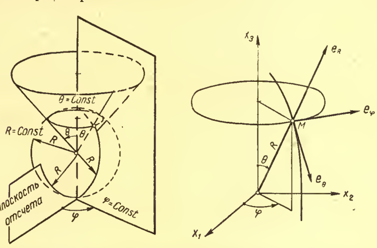


Рис. 2.13. Сферическая система координат: координатные поверхности; координатные линии (R, θ, φ) и векторный базис их осей

Пересечение двух поверхностей дает линию. Очевидно, на этой линии значения двух координат постоянны, а третья меняется. Эти линии изменения одной из координат называются ***координатными линиями*** (рис. 2.11).

В прямоугольной системе координат это будут прямые. В цилиндрической системе координат это будут: прямая ($R = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$), прямая ($\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$) и окружность ($R = \text{const}$, $z = \text{const}$).

В сферической системе координат координатными линиями являются: окружность ($R = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$), окружность ($R = \text{const}$, $\theta = \text{const}$) и прямая ($\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$).

Условимся положительным направлением на координатной линии q^i называть направление, в котором перемещается точка при увеличении q^i.

Направления координатных линий определяют (рис. 2.11) при помощи координатного базиса ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$). Векторы этого базиса касательны к соответствующим координатным линиям и направлены в сторону возрастания соответствующих координат. Этот базис называется *локальным* (местным) базисом. Важно отметить, что в общем случае векторы базиса не взаимно перпендикулярны и не являются ортами ($|\boldsymbol{e}| \neq 1$). Касательные к координатным линиям, на которых установлено положительное направление базисными векторами, называются *координатными осями* криволинейной системы координат.

Следует отметить, что *в случае декартовой системы координат* (прямоугольной и косоугольной), *базисные векторы совпадают для всех точек пространства*. Этим свойством обладает только декартова система координат. *Для любой криволинейной системы координат, базисные векторы различны для различных точек пространства* (см. рис. 2.14). В этом случае координатный базис называют подвижным, ибо он меняется от точки к точке.

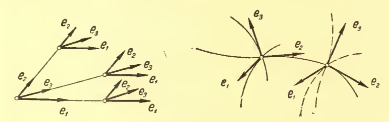


Рис. 2.14. Местный базис. Только в декартовых системах координат местный базис одинаков для всех точек пространства

Если векторы базиса взаимно перпендикулярные, то система криволинейных координат называется *ортогональной*.

В ортогональных системах касательные к координатным линиям в каждой точке пересекаются под прямыми углами. Цилиндрическая и сферическая криволинейные системы координат являются ортогональными. Как уже упоминалось,

ортогональные системы наиболее распространены в приложениях, хотя, конечно, условие ортогональности системы не обязательно для обобщенных координат (q_1, q_2, q_3).

Основной характеристикой любой обобщенной системы координат является ее *метрика*, т. е. выражение квадрата элементарной дуги (см. 1.6)

$$ds^2 = g_{ik} dq^i dq^k.$$

Здесь $g_{ik} = e_i \cdot e_k$ — ковариантные компоненты метрического тензора.

При помощи компонент метрического тензора можно определить основные элементы пространства, арифметизированного системой координат (q^1, q^2, q^3).

Элемент дуги вдоль координатной линии q_i будет:

$$ds_i = |e_i| dq^i = \sqrt{g_{ii}} dq^i \text{ (нет суммирования по } i). \qquad (2.22)$$

Элемент площади в координатной поверхности $q^1 = \text{const}$ будет:

$$\left.\begin{aligned} d\sigma_1 &= |e_2 \times e_3| dq^2 dq^3 = \sqrt{(e_2 \times e_3) \cdot (e_2 \times e_3)}\, dq^2 dq^3 = \\ &= \sqrt{(e_2 \cdot e_2)(e_3 \cdot e_3) - (e_2 \cdot e_3)(e_2 \cdot e_3)}\, dq^2 dq^3 = \\ &= \sqrt{g_{22} g_{33} - g_{23}^2}\, dq^2 dq^3. \\ &\text{Аналогично найдем} \\ d\sigma_2 &= \sqrt{g_{11} g_{33} - g_{13}^2}\, dq^3 dq^1, \\ d\sigma_3 &= \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\, dq^1 dq^2; \\ &\text{короче:} \\ d\sigma_i &= \sqrt{g_{jj} g_{kk} - g_{jk}^2}\, dq^j dq^k \text{ (нет суммирования!).} \end{aligned}\right\} \qquad (2.23)$$

Элемент объема получим, используя (1.46) из 1.6:

$$d\tau = \sqrt{G}\, dq^1 dq^2 dq^3, \qquad (2.24)$$

где

$$G = \det \| g_{ik} \|.$$

В случае ортогональной системы координат, основными ее характеристиками являются *коэффициенты Лямэ*, определяемые равенством

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= H_1^2 (dq^1)^2 + H_2^2 (dq^2)^2 + H_3^2 (dq^3)^2. \\ &\text{Как было показано в 1.6:} \\ H_1 &= \sqrt{g_{11}}; \quad H_2 = \sqrt{g_{22}}; \quad H_3 = \sqrt{g_{33}}. \\ &\text{В этом случае} \\ ds_i &= H_i dq^i \text{ (нет суммирования!),} \\ d\sigma_i &= H_j H_k dq^j dq^k \text{ (нет суммирования!),} \\ d\tau &= H_1 H_2 H_3 dq^1 dq^2 dq^3. \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

Соответственно для декартовой системы прямоугольных координат, для цилиндрической и для сферической систем имеем

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, \\ ds^2 &= dR^2 + R^2 d\varphi^2 + dz^2, \\ ds^2 &= dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \end{aligned}\right\} \qquad (2.26)$$

Отсюда видно, что для прямоугольных декартовых координат все коэффициенты Лямэ равны единице, для цилиндрической системы координат имеем

$$H_1 \equiv H_R = 1, \quad H_2 \equiv H_\varphi = R, \quad H_3 \equiv H_z = 1, \qquad (2.27)$$

а для сферической

$$H_1 \equiv H_R = 1, \quad H_2 \equiv H_\theta = R, \quad H_3 \equiv H_\varphi = R \sin\theta. \qquad (2.28)$$

Если непосредственно определить квадрат элемента дуги представляется затруднительным, то можно исходить из более общих соображений. Сопоставим каждой точке пространства три числа q^1, q^2, q^3, это означает, что ее радиус-вектор можно рассматривать как вектор-функцию аргументов q^1, q^2, q^3, т. е.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q^1, q^2, q^3).$$

Тогда проектируя радиус-вектор на оси какой-то декартовой системы координат, получим три скалярных функции, устанавливающих соответствие между x_i и q^k:

$$x_1 = x_1(q^1, q^2, q^3), \; x_2 = x_2(q^1, q^2, q^3), \; x_3 = x_3(q^1, q^2, q^3). \; (2.29)$$

При этом, предполагая, что якобиан

$$I = \det \left\| \frac{\partial x_l}{\partial q^k} \right\|$$

не равен нулю или бесконечности, мы получим взаимно однозначное соответствие между x_l и q^k, так что в дополнение к (2.29) существуют функции

$$q^1 = q^1(x_1, x_2, x_3), \; q^2 = q^2(x_1, x_2, x_3), \; q^3 = q^3(x_1, x_2, x_3). \; (2.30)$$

Например, в случае цилиндрической системы координат имеем

$$\left.\begin{aligned} R \equiv q^1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varphi \equiv q^2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{x_2}{x_1}, \quad z \equiv q^3 = x_3; \\ x_1 = R\cos\varphi, \quad x_2 = R\sin\varphi, \quad x_3 = z, \end{aligned}\right\} \quad (2.31)$$

а в случае сферической системы выражения (2.29) и (2.30) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &R \equiv q^1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ &\theta \equiv q^2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}, \qquad \varphi \equiv q^3 = \operatorname{arc\,tg} \frac{x_2}{x_1}; \\ &x_1 = R \sin\theta \cos\varphi, \quad x_2 = R \sin\theta \sin\varphi; \quad x_3 = R\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (2.32)$$

Вычисляя полное бесконечно малое изменение радиуса-вектора, получим

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^1}\, dq^1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^2}\, dq^2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^3}\, dq^3 \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}\, dq^i.$$

Отсюда, метрика:

$$ds^2 = (d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^k}\, dq^i dq^k.$$

Таким образом, векторы локального базиса будут:

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}. \quad (2.33)$$

Следовательно, компоненты метрического тензора могут быть вычислены по формулам

$$g_{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^k} = \frac{\partial x_l}{\partial q^i} \frac{\partial x_l}{\partial q^k}, \quad (2.34)$$

где $x_l = x_l(q^1, q^2, q^3)$ есть функции (2.29), причем $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_1 x_1 + \boldsymbol{i}_2 x_2 + \boldsymbol{i}_3 x_3$.

В случае ортогональных координат, коэффициенты Лямэ могут быть вычислены по формулам

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q^i}\right)^2}. \quad (2.35)$$

Читателю предлагается самостоятельно получить (2.27) и (2.28), используя выражение (2.35).

2.9 Тензоры в системах обобщенных координат

Ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты тензоров. В системе обобщенных координат, определяемой произвольным неортогональным базисом, вектор (тензор 1-го ранга) полностью определяется либо его тремя ковариантными компонентами A_i, либо его тремя контравариантными компонентами A^i. Величины A_i отличаются от A^i законом преобразования при изменении пространственной системы координат (см. 1.31—1.32).

$$A'_i = \alpha^k_{i'} A_k, \quad A'^i = \alpha^{i'}_k A^k.$$

Тем не менее, эти величины не являются независимыми; связь между ними устанавливается формулами [см. (1.40), (1.41)].

При этом, коэффициенты g_{ik} (g^{ik}) определяют базис системы обобщенных координат, в которых рассматриваются компоненты вектора (см. 1.3).

Аналогично, относя тензоры 2-го и выше рангов к общим системам координат, можно рассматривать различного рода их компоненты. Эти компоненты отличаются друг от друга законом преобразования при изменении пространственной системы координат. Существуют также формулы, связывающие различного рода компоненты между собой.

Приведем определение тензора 2-го ранга, которое не ограничено применением только декартовой системы прямоугольных координат.

Тензор 2-го ранга — это величина, полностью определяемая в любой системе координат $3^2 = 9$ *числами (или функциями), называемыми компонентами. Компоненты тензора могут быть ковариантными* A_{ik}, *контравариантными* A^{ik}, *смешанными* $A_i^{\cdot k}$, $A^i_{\cdot k}$. *При изменении пространственной системы координат эти компоненты преобразуются в* A'_{ik}, A'^{ik}, $A_i'^{\cdot k}$, $A'^i_{\cdot k}$ *по закону*

$$\left.\begin{aligned} A'_{ik} &= \alpha^l_{i'} \alpha^m_{k'} A_{lm}, \quad A'^{ik} = \alpha^{i'}_l \alpha^{k'}_m A^{lm}, \\ A_i'^{\cdot k} &= \alpha^l_{i'} \alpha^{k'}_m A_l^{\cdot m}, \quad A'^i_{\cdot k} = \alpha^{i'}_l \alpha^m_{k'} A^l_{\cdot m}. \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

Здесь, коэффициенты $\alpha^k_{i'}$, $\alpha^{k'}_i$ — коэффициенты прямого и обратного преобразования (формулы 1.4—1.5).

Компоненты тензора, рассматриваемые в системе координат с метрикой $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$, связаны между собой формулами

$$\left.\begin{aligned} A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm}, \quad A_{ik} = g_{il} g_{km} A^{lm}, \quad A_{ik} = g_{kl} A_i^{\cdot l} = g_{il} A^l_{\cdot k}, \\ A_i^{\cdot k} = g^{kl} A_{il}, \quad A_i^{\cdot k} = g_{il} A^{lk}, \\ A^i_{\cdot k} = g^{il} A_{lk}, \quad A^i_{\cdot k} = g_{kl} A^{il}, \quad A^{ik} = g^{il} A_l^{\cdot k} = g^{kl} A^i_{\cdot l}. \end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

Точка в обозначениях смешанных компонент подчеркивает порядок следования индексов. Так в $A_i^{\cdot k}$ первый индекс «ковариантный», а второй — «контравариантный»; в $A^i_{\cdot k}$ порядок следования индексов обратный.

Пример. Покажем, что величины g_{ik}, g^{ik}, $g_i^{\cdot k}$, определенные в 1.6, являются компонентами тензора второго ранга. Этот тензор называется *метрическим тензором*.

Прежде всего, используя (1.5—1.6), § 1.3 и определение (1.39), получим законы преобразования этих величин при изменении пространственной системы координат. Имеем

$$g'_{ik} = e'_i \cdot e'_k = \alpha^l_{i'} e_l \cdot \alpha^m_{k'} e_m = \alpha^l_{i'} \alpha^m_{k'} e_l \cdot e_m = \alpha^l_{i'} \alpha^m_{k'} g_{lm},$$

$$g'^{ik} = e'^i \cdot e'^k = \alpha^{i'}_l \alpha^{k'}_m e^l \cdot e^m = \alpha^{i'}_l \alpha^{k'}_m g^{lm},$$

$$g_i'^{\cdot k} = e'_i \cdot e'^k = \alpha^l_{i'} \alpha^{k'}_m e_l \cdot e^m = \alpha^l_{i'} \alpha^{k'}_m g_l^{\cdot m}.$$

Следовательно, g_{ik} — ковариантные компоненты некоторого тензора, g^{ik} — контравариантные компоненты, $g_i^{\cdot k}$ — смешанные компоненты.

Покажем, что это компоненты одного и того же тензора. Для этого достаточно показать, что они связаны между собой формулами вида (2.37).

Но из определения g_{ik} и свойств векторов основного и взаимного базиса следует

$$e_i = g_{il} e^l.$$

Тогда имеем

$$g_{ik}=e_i\cdot e_k=g_{il}e^l\cdot g_{km}e^m=g_{il}g_{km}e^l\cdot e^m=g_{il}g_{km}g^{lm},$$

$$g_{ik}=g_{il}e^l\cdot e_k=g_{il}g_k^{\cdot\,l}$$

и т. д.

Таким образом, величины g_{ik}, g^{ik}, $g_i^{\cdot\,k}$ действительно являются компонентами *одного* тензора (метрического тензора). Его смешанные компоненты совпадают по значениям с символом Кронекера δ_{ik}.

Понятие тензора 2-го ранга может быть обобщено на понятие ***тензора*** n***-го ранга***, отнесенного к произвольной системе координат. Тензор n-го ранга рассматривается как величина, определяемая 3^n числами, которые могут быть либо его ковариантными, либо контравариантными, либо различного рода смешанными компонентами.

Так, например, тензор 3-го ранга имеет всего 27 компонент и его смешанные компоненты могут быть вида $A_{ik}^{\cdot\cdot\,l}$, $A_{\cdot\,k}^{l\,\cdot\,l}$ и т. д. Закон преобразования их следующий

$$A'^{\cdot\cdot\,l}_{ik}=\alpha^m_{l'}\,\alpha^n_{k'}\,\alpha^{l'}_r\,A^{\cdot\cdot\,r}_{mn},$$

$$A'^{l\,\cdot\,l}_{\cdot\,k}=\alpha^{i'}_m\,\alpha^n_{k'}\,\alpha^{l'}_r\,A^{m\,\cdot\,r}_{\cdot\,n}.$$

При этом говорят, что $A_{ik}^{\cdot\cdot\,l}$ — смешанные компоненты один раз контравариантные, дважды ковариантные и т. д.

Правило инвариантности тензорных уравнений, рассмотренное в 2.7, теперь, очевидно, должно быть дополнено требованием, чтобы все тензоры, которые входят в виде слагаемых в уравнение, должны иметь не только одинаковый ранг, но и одинаковую «ковариантность». Иначе говоря, ковариантные компоненты не могут складываться с контравариантными, а смешанные компоненты могут складываться только тогда, когда они имеют одинаковое строение ($A_l^{\cdot\,kl}$ и $B_l^{\cdot\,kl}$, и т. д.).

«Физические» компоненты тензоров. Случай ортогональных базисов. Понятие «физических» компонентов векторов естественно обобщается и на «физические» компоненты тензоров 2-го и высших рангов. В общем случае это следует из того, что компоненты любого тензора n-го ранга могут быть представлены в виде суммы произведений компонент трех в трехмерном пространстве векторов (см. задачу 5 этой главы). Если считать факт разложения тензоров на сумму произведений компонент векторов установленным, то, в частности, «физические» компоненты A^*_{ik} и A^{*ik} тензора 2-го ранга определяются выражениями

$$A^{*ik}=|e_i|\cdot|e_k|\,A^{ik}=\sqrt{g_{ii}g_{kk}}\,A^{ik}\ \text{(нет суммирования!)},\tag{2.38}$$

$$A^*_{ik}=\frac{A_{ik}}{|e_i|\cdot|e_k|}=\frac{A_{ik}}{\sqrt{g_{ii}g_{kk}}}\quad\text{(нет суммирования!)}.\tag{2.39}$$

Эти формулы являются обобщением формул (1.37). В случае ортогональных базисов из (2.37) и из (1.39) получим

$$A^{ik}=g^{ii}g^{kk}A_{ik}=\frac{A_{ik}}{H_i^2\,H_k^2}\quad\text{(нет суммирования!)},$$

$$A_{ik}=g_{ii}g_{kk}A^{ik}=H_i^2\,H_k^2\,A^{ik}\quad\text{(нет суммирования!)}.$$

Тогда из (2.38) и (2.39) следует, что оба вида физических компонент тензоров совпадают $A^*_{ik} = A^{*ik}$ и равны

$$A^*_{ik} = \frac{A_{ik}}{H_i H_k} = A^{ik} H_i H_k \text{ (нет суммирования!)}. \tag{2.40}$$

Операция поднятия и опускания индексов. В связи с выражениями (1.40), (1.41), (2.37) и им подобными в алгебре тензоров говорят об операции поднятия и опускания индексов у компонент тензоров. Под этим понимают правило получения одних компонент через другие при помощи оператора — метрического тензора. Правило заключается в том, что «поднимаемый» («опускаемый») индекс переходит в метрический тензор, а на то место, куда он должен быть поднят (опущен), ставится «немой» индекс суммирования; вторым «немым» индексом суммирования является свободный индекс метрического тензора. Например.

$$A_{ikl} = g_{im} A^{m}_{\cdot\, kl} = g_{im} g_{kn} A^{mn}_{\cdot\cdot\, l} = g_{im} g_{kn} g_{lr} A^{mnr}.$$

Иногда о тождественном преобразовании вида

$$A_{lk} = g_i^{\cdot\, l} A_{ik}$$

говорят как об операции «переименования» индекса.

Ковариантные, контравариантные и смешанные тензоры. Иногда при первоначальном определении тензора как физической или геометрической величины удобно исходить из каких-то определенных его компонент, например из ковариантных. В этом смысле можно говорить о таком тензоре как о ковариантном тензоре. Аналогично рассматривают контравариантные и смешанные тензоры. Однако из каких бы мы компонент не исходили, тензор n-го ранга, как единая величина, всегда определяется только 3^n независимыми числами. С другой стороны, если определены какие-либо компоненты тензора, то по формулам, аналогичным (2.37), всегда можно найти его компоненты любого другого строения. Это является следствием того факта, что в пространстве с заданной метрикой всякая физическая или геометрическая величина может быть представлена компонентами любого строения.

Например, рассмотрим скалярную функцию $f(x^1, x^2, x^3)$ обобщенных координат x^1, x^2, x^3. Выясним закон преобразования ее трех частных производных $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ при изменении системы координат.

Учитывая, что x^i и x'^i являются контравариантными компонентами радиуса-вектора одной и той же точки, получим по (1.32)

$$x^k = \alpha^k_{i'} x'^i.$$

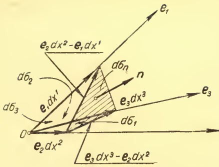
Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x'^i} = \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \alpha^k_{i'} \frac{\partial f}{\partial x^k}. \tag{*}$$

Таким образом, можно сказать, что три величины $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, преобразующиеся по закону ковариантных компонент, образуют ковариантный вектор. В действительности, конечно, этот вектор (градиент — см. 4.4) имеет как ко-, так и контравариантные компоненты.

Иллюстрацией появления понятий ковариантных и других тензоров может служить пример тензора напряжений в общих системах координат.

Пример. Тензор напряжений. Рассмотрим в системе координат, определяемой произвольным правым базисом (e_1, e_2, e_3), элементарный тетраэдр



Рнс. 2.15. Тензор напряжений в обобщенных коордннатах

(см. рис. 2.15) с ребрамн $|e_1|dx^1$, $|e_2|dx^2$, $|e_3|dx^3$, сходящнмися в начале коорднннат, н с «донышком» площадью $d\sigma_n$. Орт нормали к донышку обозначнм через n, а площади граней через $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$.

Тогда имеем

$$d\sigma_1 = |e_2 \times e_3| dx^2 dx^3,$$
$$d\sigma_2 = |e_3 \times e_1| dx^3 dx^1,$$
$$d\sigma_3 = |e_1 \times e_2| dx^1 dx^2. \quad (*)$$

Кроме того (см. рнс. 2.15) имеем:

$$n d\sigma_n = (e_2 dx^2 - e_1 dx^1) \times (e_3 dx^3 - e_2 dx^2) = (e_2 \times e_3) dx^2 dx^3 + (e_3 \times e_1) dx^3 dx^1 + (e_1 \times e_2) dx^1 dx^2.$$

Вводя векторы e^i взанмного базнса и учнтывая (1.24) и формулы (*) этого параграфа, получим, например,

$$e_2 \times e_3 = e^1 \sqrt{G}$$

н, следовательно,

$$(e_2 \times e_3) dx^2 dx^3 = \frac{e^1}{|e^1|} d\sigma_1.$$

Тогда

$$n d\sigma_n = \sum_{i=1}^{3} \frac{e^i}{|e^i|} d\sigma_i.$$

Отсюда, вводя *ковариантные* компоненты n_i вектора n, получим

$$n_i d\sigma_n = \frac{d\sigma_i}{|e^i|}. \quad (**)$$

Как н в прнмере 2.4 вектор напряження на «донышке» тетраэдра p_n имеет выражение

$$p_n = \sum_{i=1}^{3} p_i d\sigma_i \frac{1}{d\sigma_n},$$

Подставляя сюда значення $d\sigma_i$ нз (**), нмеем

$$p_n = \sum_{i=1}^{3} p_i |e^i| n_i.$$

Поскольку в сумме справа стоят n_i — коварнантные компоненты вектора n, то при рассмотренин компонент векторов $p_i|e^i|$ $(i = 1, 2, 3)$ мы обязательно должны брать нх контраварнантные составляющие. Только в этом случае * компоненты вектора p_n будут преобразовываться при нзмененнн системы координат по законам (1.33). Именно в этом смысле мы можем говорить,

* Читателю предлагается провернть это самостоятельно.

что векторы $p_i \mid e^i \mid$ являются контравариантными. Обозначая эти контравариантные компоненты этих векторов через p^{ik}, так что $p_i \mid e^i \mid = p^{ik} e_k$ (суммирование только по «k»), получим

$$p_n = \sum_{k,\, i=1}^{3} p^{ik} e_k n_i. \qquad (2.41)$$

Отсюда контравариантные компоненты вектора напряжения p_n равны

$$p_n^k = p^{ik} n_i. \qquad (2.42)$$

Девять величин p^{ik} являются контравариантными компонентами единой физической величины — тензора напряжений. Они позволяют в выбранной системе координат определить в точке «O» напряжения на любой площадке с нормалью n.

Ковариантные, смешанные и «физические» компоненты этого тензора могут быть определены согласно общим формулам:

$$p_{ik} = g_{il} g_{km} g^{lm}; \quad p_i^{\cdot k} = g_{il} p^{lk}; \ \ldots \text{ и т. д.}$$

Задачи и упражнения

Задача 1. Найти выражение для момента инерции системы материальных точек относительно оси (u) с ортом u.

Решение. Эту задачу можно решить двумя путями.

Если не использовать понятия тензора моментов инерции, а исходить из элементарного определения момента инерции материальной точки как произведения массы на квадрат расстояния до оси, то

$$I_{uu} = \sum_{n=1}^{N} m_n (r_n \times u)^2,$$

где N — число точек,
m_n — масса n-й точки,
r_n — радиус вектор n-й точки относительно некоторого начала O, взятого на оси (u) с ортом u ($|u| = 1$), при этом $|r_n \times u|$ — расстояние n-й точки от оси (u).

Преобразуем выражение для I_{uu}, используя (1.16) и (1.19),

$$I_{uu} = \sum_{n=1}^{N} m_n (r_n \times u) \cdot (r_n \times u) = \sum_{n=1}^{N} m_n r_n \cdot [u \times (r_n \times u)] =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} m_n r_n \cdot [r_n - u (r_n \cdot u)] = \sum_{n=1}^{N} m_n [r_n^2 - (u \cdot r_n)^2].$$

Если ввести систему (K) с началом в O, то получим выражение I_{uu} через координаты точек $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$, $x_3^{(n)}$ $(r_n = x_1^{(n)} i_1 + x_2^{(n)} i_2 + x_3^{(n)} i_3)$:

$$I_{uu} = \sum_{n=1}^{N} m_n [x_l^{(n)} x_l^{(n)} - (x_l^{(n)} u_l)^2]. \qquad (*)$$

Это же выражение можно получить, если в (K) известны компоненты I_{ik} тензора моментов инерции.

Действительно, если принять ось (u) за ось (x_1) некоторой системы (K'), то по (2.7) имеем:

$$I_{uu} \equiv I'_{11} = \alpha'_{1'i}\, \alpha_{1'k} I_{ik}.$$

Но

$$\alpha_{1'l} = i'_1 \cdot i_l = u \cdot i_l = u_l.$$

Поэтому

$$I_{uu} = I_{ik} u_i u_k. \qquad (**)$$

Подставив сюда выражение (2.9) для I_{ik}, получим формулу (*).

Задача 2. Показать, что кинетическая энергия твердого тела, имеющего неподвижную точку и вращающегося с мгновенной угловой скоростью ω, равна

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 I_{\omega\omega},$$

где $I_{\omega\omega}$ — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения (оси, совпадающей с ω).

Решение. Используя формулу Эйлера (см. задачу 12 гл. 1), получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n V_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n (\omega \times r_n)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n (\omega \times r_n) \cdot (\omega \times r_n).$$

Учитывая (1.16) и (1.19), получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n \omega \cdot [r_n \times (\omega \times r_n)] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n \omega \cdot [(\omega r_n)^2 - r_n (r_n \cdot \omega)] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} m_n [\omega^2 r_n^2 - (\omega \cdot r_n)^2].$$

Вводя орт мгновенной оси вращения $\omega^0 = \frac{\omega}{\omega}$ и учитывая выражение для I_{uu}, полученное в предыдущей задаче, получим

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{n=1}^{N} m_n [r_n^2 - (\omega^0 \cdot r_n)^2] = \frac{1}{2} \omega^2 I_{\omega\omega}.$$

Используя формулу (**) предыдущей задачи, можно представить T через компоненты тензора моментов инерции относительно неподвижной точки и компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$:

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 I_{\omega\omega} = \frac{1}{2}\omega^2 I_{ik}\omega_i^0\omega_k^0 = \frac{1}{2}I_{ik}\omega_i\omega_k.$$

Задача 3. Вычислить момент инерции системы относительно оси (v) с ортом $\boldsymbol{v}$, если ось (v) параллельна оси (u), которая проходит через центр масс и относительно которой момент инерции системы равен I_{uu}.

Решение. Выберем на оси (v) некоторое начало O, относительно которого положение центра масс, находящегося на оси (u), определяется радиусом-вектором $\boldsymbol{R}$.

Если $\boldsymbol{r}_n$ — радиус-вектор точки с массой m_n, относительно начала O, а $\boldsymbol{r}'_n$ — радиус-вектор той же точки относительно центра масс, то

$$\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{r}'_n + \boldsymbol{R}.$$

Тогда имеем:

$$I_{vv} = \sum_{n=1}^{N} m_n (\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{v})^2 = \sum_{n=1}^{N} m_n [(\boldsymbol{r}'_n + \boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{v}]^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} m_n (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v})^2 + \sum_{n=1}^{N} m_n (\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{v})^2 + 2\sum_{n=1}^{N} m_n (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{r}'_n \times \boldsymbol{v}).$$

Но

$$\sum_{n=1}^{N} m_n (\boldsymbol{r}'_n \times \boldsymbol{v})^2 = \sum_{n=1}^{N} m_n (\boldsymbol{r}'_n \times \boldsymbol{u})^2 = I_{uu};$$

$$\sum_{n=1}^{N} m_n (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{r}'_n \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v}) \cdot \left[\left(\sum_{n=1}^{N} m_n \boldsymbol{r}'_n\right) \times \boldsymbol{v}\right] = 0,$$

ибо $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ (оси параллельны) и $\sum_{n=1}^{N} m_n \boldsymbol{r}'_n = 0$ по определению центра масс. Следовательно,

$$I_{vv} = I_{uu} + M(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v})^2;$$

здесь $|\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v}|$ — расстояние между осями, а M — масса всей системы.

Задача 4. Найти наиболее общий вид линейной зависимости между компонентами тензора напряжений и тензора скоростей деформаций, если среда изотропна.

Решение. Общая линейная зависимость между p_{ik} и V_{ik} может быть записана в виде

$$p_{ik} = \eta_{iklm} V_{lm},$$

где η_{iklm} — тензор 4-го ранга, описывающий свойства среды.

Поскольку свойства среды должны быть одинаковы в различных направлениях, то компоненты этого тензора должны сохранять свои значения при любом повороте координатной системы. Тензором, сохраняющим свои компоненты во всех координатных системах, является (см. § 3, 6) *шаровой* тензор, компоненты которого имеют вид $A\delta_{ik}$, где A — скаляр.

Следовательно, в случае изотропной среды тензор η_{iklm} должен быть представим через шаровые тензоры. Наиболее общее представление имеет вид (в предположении его единственности)

$$\eta_{iklm} = A\delta_{ik}\delta_{lm} + B\delta_{il}\delta_{km} + C\delta_{im}\delta_{kl}.$$

Тогда

$$p_{ik} = A\delta_{ik}\delta_{lm} V_{lm} + B\delta_{il}\delta_{km} V_{lm} + C\delta_{im}\delta_{kl} V_{lm} = \\ = A\delta_{ik} V_{ll} + BV_{ik} + CV_{ki}.$$

Поскольку $V_{ik} = V_{ki}$, то, обозначая $B + C = 2\mu$ и $A = \mu'$, получим

$$p_{ik} = 2\mu V_{ik} + \mu'\delta_{ik} V_{ll}.$$

Коэффициенты μ, μ' (коэффициенты вязкости) определяют свойства изотропной среды. Полученная зависимость является основной во всей гидромеханике, при этом тензор p_{ik} определяет только напряжения от сил вязкости, но не давления.

Задача 5. Показать, что любой тензор 2-го ранга может быть разложен на сумму попарных произведений компонент трех векторов.

Решение. Введем тройку взаимно-ортогональных ортов u_1, u_2, u_3.

Обозначим через $u_{(\alpha)\,l}$, $u^l_{(\alpha)}$ — ковариантные и контравариантные компоненты вектора u_α в рассматриваемой системе обобщенных координат. Пусть в этой же системе определены, например, ковариантные компоненты некоторого тензора T_{ik}.

Рассмотрим скаляры

$$T_{(\alpha\ \beta)} = T_{ik} u^l_{(\alpha)}\, u^k_{(\beta)}. \tag{2.43}$$

Ясно, что величины $T_{(\alpha\ \beta)}$ являются скалярными.

Умножим каждый из этих скаляров на $u_{(\alpha)\,p}$, $u_{(\beta)\,q}$ и просуммируем по α и β:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} T_{(\alpha\ \beta)}\, u_{(\alpha)\,p}\, u_{(\beta)\,q} = \sum_{l,k=1}^{3} T_{ik} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} u^l_{(\alpha)}\, u_{(\alpha)\,p}\, u^k_{(\beta)}\, u_{(\beta)\,q}. \tag{2.44}$$

Однако, по определению ортов u_α имеем

$$u_\alpha \cdot u_\beta = \sum_{l=1}^{3} u^l_{(\alpha)}\, u_{(\beta)\,l} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Умножим это равенство на $u^{\alpha}_{(\beta)}$ и просуммируем по β

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \delta_{\alpha\beta} u^{\alpha}_{(\beta)} = \sum_{i=1}^{3} u^{i}_{(\alpha)} \sum_{\beta=1}^{3} u_{(\beta)\,i} u^{\alpha}_{(\beta)} .$$

Или

$$u^{\alpha}_{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{3} u^{i}_{(\alpha)} \sum_{\beta=1}^{3} u_{(\beta)\,i} u^{\alpha}_{(\beta)} . \qquad (*)$$

С другой стороны, по определению

$$u^{\alpha}_{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{3} g_{i}^{\cdot\,\alpha} u^{i}_{(\alpha)} .$$

Поэтому, из сравнения этого выражения с (*), получаем

$$g_{i}^{\cdot\,k} = \sum_{\beta=1}^{3} u_{(\beta)\,i} u^{k}_{(\beta)} . \qquad (2.45)$$

Тогда, очевидно, в (2.44) стоящая справа сумма равна

$$\sum_{i,\,k=1}^{3} T_{ik} g_{p}^{\cdot\,i} g_{q}^{\cdot\,k} = T_{pq} .$$

Следовательно,

$$T_{pq} = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{3} T_{(\alpha\beta)} u_{(\alpha)\,p} u_{(\beta)\,q} . \qquad (2.46)$$

Эта формула и доказывает утверждение о том, что любой тензор 2-го ранга может быть представлен в виде суммы попарных произведений компонент трех векторов. Из нее легко получить разложение для T^{ik} и $T_{i}^{\cdot\,k}$.

Между прочим, выражение (2.45) является разложением смешанных компонент метрического тензора по векторам.

Совершенно аналогично для тензора n-го ранга можно получить разложение

$$T_{i_1 i_2, \ldots, i_n} = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 1}^{3} T_{(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)} u_{(\alpha_1)\,i_1} u_{(\alpha_2)\,i_2} \cdots u_{(\alpha_n)\,i_n} .$$

Задача 6. Найти разложение компонент g^{ik} и g_{ik} метрического тензора по векторам.

Решение. На основании (1.40) имеем

$$g_{jk} u^{j}_{\alpha} = u_{(\alpha)\,k} .$$

Умножая каждое из этих соотношений ($\alpha = 1, 2, 3$) на $u_{(\alpha)\,i}$ и суммируя по α, получим

$$\sum_{j=1}^{3} g_{jk} \sum_{\alpha=1}^{3} u^{j}_{(\alpha)} u_{(\alpha)\,i} = \sum_{\alpha=1}^{3} u_{(\alpha)\,k} u_{(\alpha)\,i} .$$

Но по (2.45) имеем

$$\sum_{j=1}^{3} g_{jk}\, g_i^{\cdot j} = \sum_{\alpha=1}^{3} u_{(\alpha)\,k}\, u_{(\alpha)\,i}\,.$$

Или

$$g_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{3} u_{(\alpha)\,k}\, u_{(\alpha)\,i}\,.$$

Аналогично получим

$$g^{ik} = \sum_{\alpha=1}^{3} u_{(\alpha)}^{i}\, u_{(\alpha)}^{k}\,.$$

Упражнения

1. Пусть система (K') из начального положения, в котором она совпадала с (K), повернута на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг оси (x_3), а затем на $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси (x_1') так, что ось (x_2') совпадает с (x_3) (рис. 2.16).

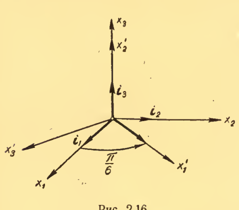


Рис. 2.16.

Найти:

1) Компоненты векторов

$$A = i_1 + 2i_2 + 3i_3\,,$$
$$B = 4i_1 + 5i_2 + 6i_3$$

в системе (K').

2) Касательные и нормальные напряжения на площадках, перпендикулярных осям системы (K'), если в системе (K) тензор напряжений p_{ik} имел матрицу

$$\|p_{ik}\| = \left\| \begin{matrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{matrix} \right\|.$$

3) Найти напряжение на площадке, проходящей через биссектрису первого квадрата плоскости (x_1, x_2) под углом $\frac{\pi}{4}$ к оси (x_3) в системе (K).

2. Тензор инерции прямого кругового цилиндра относительно осей, проходящих через его центр тяжести [ось (x_3) параллельна образующим], имеет вид

$$\|I_{ik}\| = \begin{Vmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{Vmatrix}.$$

Найти момент инерции цилиндра относительно биссектрис координатных углов.

3. Еслн A_{ikl} — ковариантные компоненты тензора 3-го ранга, а B^{pqmn} — контравариантные компоненты тензора 4-го ранга, показать, что велнчнны $A_{ikl}B^{pqmn}_{klmn}$ являются смешаниыми (один раза ковариантнымн, два раза контраварнаитнымн) компонентамн тензора 3-го раига.

4. Еслн V_l — коварнантные компоненты вектора, x^l — обобщенные коордннаты, то проверить является лн совокупность девятн велнчнн $\frac{\partial V_l}{\partial x^k}$ тензором 2-го раига.

5. Для преобразовання координат

$$q^1 = x_1 + x_2, \quad q^2 = x_2 - x_1, \quad q^3 = 2x_3,$$

где (x_1, x_2, x_3) — прямоугольные декартовы координаты:

1) показать что (q^1, q^2, q^3) — снстема декартовых координат;
2) иайтн базнсные векторы;
3) иайтн компоненты g_{ik} метрического теизора;
4) найтн ко- и контраварнантные компоиенты векторов;

$$2i_1, \; A = i_1 + i_2, \quad B = 2i_1 - 3i_3;$$

5) вычнслнть детерминант $G = \det \| g_{ik} \|$;
6) вычислить проекцин $A \times B$ в той н другой системе координат.

6. Для сфернческой снстемы координат показать, что векторы, чьи контравариантные компоненты равны (1, 0, 0) $\left(0, \frac{1}{R}, 0\right)$, $\left(0, 0, \frac{1}{R \sin \theta}\right)$ образуют тройку ортогональных векторов.

7. Для системы бнполярных коордннат (q^1, q^2), связанных с декартовыми прямоугольными (x_1, x_2) соотношеннямн

$$x_1 = \frac{a \operatorname{sh} q^1}{\operatorname{ch} q^1 + \cos q^2}, \quad x_2 = \frac{a \sin q^2}{\operatorname{ch} q^1 + \cos q^2}, \quad (a = \text{const}),$$

найтн:

1) базнсные векторы e_1, e_2 (ортогональные ли онн?);
2) ковариантные компонеиты метрического тензора g_{ik};
3) коварнантные н контравариантные компоненты ортов i_1, i_2.

Глава третья

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

В этом разделе мы остановимся на основных алгебраических действиях над тензорами (сложение и вычитание, умножение, свертывание) и на некоторых свойствах тензоров.

В обобщенной системе криволинейных координат к алгебре тензоров относится еще операция перестановки индексов и операция поднятия и опускания индексов (рассмотренная ранее в 2.9).

Так как тензор определяется своими компонентами, то определение действий над тензорами сводится к построению формул, выражающих в каждой системе координат компоненты результата действия через компоненты тензоров, над которыми производятся действия.

3.1. Сложение тензоров

Пусть A_{ik} и B_{ik} — два тензора 2-го ранга. Составим числа C_{ik} в виде сумм соответствующих компонент тензоров:

$$C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}.$$

Числа C_{ik} образуют тензор 2-го ранга. Действительно, так как A_{ik} и B_{ik} — тензоры, то

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}A_{lm};$$

$$B'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}B_{lm}$$

и

$$C'_{ik} = A'_{ik} + B'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}(A_{lm} + B_{lm}) = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}C_{lm},$$

т. е. C_l — тензор 2-го ранга.

Тензор C_{lk} называется *суммой* тензоров A_{ik} и B_{ik}, а операция образования его компонент — *сложением* этих тензоров.

Правило сложения относится к любому числу тензоров любого ранга.

Суммой тензоров одного ранга называется тензор того же ранга, компоненты которого равны сумме соответствующих компонент слагаемых.

Таким образом складывать можно только тензоры одного ранга.

Аналогично сумме двух тензоров определяется разность двух тензоров одного ранга и, соответственно, операция вычитания.

В случае отнесения тензоров к обобщенным координатам, при сложении и вычитании тензоров одного ранга *необходимо оперировать компонентами одинакового строения*. Таким образом, правильными будут, например, записи

$$A^{ik}+B^{ik}=C^{ik},\quad A_i^{\cdot k}+B_i^{\cdot k}=C_i^{\cdot k},\quad A^{ik}_{\cdot\cdot l}+B^{ik}_{\cdot\cdot l}=C^{ik}_{\cdot\cdot l}$$

и т. д.

Вследствие того, что формулы преобразования компонент тензоров при изменении координатной системы и в самом общем случае остаются однородными относительно коэффициентов преобразования и линейными относительно компонент тензоров, величины C^{ik}, $C_i^{\cdot k}$ и т. д. предыдущих выражений являются *компонентами тензоров* того же *ранга* и *строения*, что и слагаемые.

3.2. Умножение тензоров

Пусть A_{ik} и B_{ik} два тензора 2-го ранга. Составим в каждой координатной системе всевозможные произведения компонент одного тензора на компоненты другого. Эти произведения будут зависеть от индексов, число которых равно сумме рангов тензоров A_{ik} и B_{ik}. Обозначим

$$C_{ikim}=A_{ik}B_{im}.$$

Числа C_{ikim} образуют тензор 4-го ранга. Действительно, так как

$$A'_{ik}=\alpha_{i'l}\alpha_{k'm}A_{lm};$$

$$B'_{ik}=\alpha_{i'l}\alpha_{k'm}B_{lm},$$

то

$$C'_{ikml}=A'_{ik}B'_{lm}=\alpha_{i'n}\alpha_{k'p}\alpha_{l'r}\alpha_{m's}A_{np}B_{rs}=\alpha_{i'n}\alpha_{k'p}\alpha_{l'r}\alpha_{m's}C_{nprs}.$$

Это доказывает, что C_{iklm} — тензор 4-го ранга.

Тензор C_{iklm} называется произведением тензоров A_{ik} и B_{ik}, а операция образования его компонент — умножением (иногда внешним умножением или тензорным умножением) этих тензоров.

Нетрудно видеть, что

$$C_{iklm}=A_{ik}B_{lm}\neq C_{lmik}=A_{lm}B_{ik}.$$

Таким образом, тензорное умножение *некоммутативно.*

Правило умножения относится к любому числу тензоров любого ранга.

Произведением нескольких тензоров называется тензор, компоненты которого равны произведениям компонент сомножителей. Ранг произведения тензоров равен сумме рангов сомножителей.

В самом общем случае координатных систем произведением двух тензоров, определяемых, например, компонентами $A^{l}_{\cdot kl}$ и B^{lk}, называется тензор с компонентами, определяемыми по правилу

$$C^{l\cdot\cdot mn}_{\cdot kl} = A^{l}_{\cdot kl} \cdot B^{mn}.$$

Используя общие законы преобразования компонент тензоров, нетрудно показать, что величины $C^{l\cdot\cdot mn}_{\cdot kl}$ образуют тензор.

Таким образом, перемножать можно тензоры любого ранга и строения.

3. 3. Свертывание тензоров

В тензорном исчислении часто применяется операция свертывания тензоров. *Свертыванием называется суммирование компонент тензора по двум каким-либо индексам.*

Свертывание можно проводить над тензорами, ранг которых не менее двух.

Пусть A_{ikl} — тензор 3-го ранга. Произведем свертывание его по двум индексам — i и k, т. е. возьмем только те его компоненты, у которых индексы i и k равны, и составим из них суммы:

$$A_{iil} \equiv \sum_{i=1}^{3} A_{iil} = A_{11l} + A_{22l} + A_{33l}.$$

В результате свертывания тензора A_{ikl} по другим индексам получим суммы A_{iki}, A_{lii}. Таких сумм каждого вида будет три.

Например, для A_{iil} имеем:

$$A_{ii1}\left(\equiv \sum_{i=1}^{3} A_{ii1}\right); \; A_{ii2}\left(\equiv \sum_{i=1}^{3} A_{ii2}\right); \; A_{ii3}\left(\equiv \sum_{i=1}^{3} A_{ii3}\right).$$

Докажем, что любая такая группа из трех сумм, например A_{iil}, образует тензор 1-го ранга, т. е. вектор.

Так как A_{ikl} — тензор 3-го ранга, то

$$A'_{ikl} = \alpha_{i'm}\,\alpha_{k'n}\,\alpha_{l'r}\,A_{mnr}.$$

Отсюда, свертывая по индексам i и k, получим, учитывая формулу аналогичную (2.5):

$$A'_{iil} = \alpha_{i'm}\,\alpha_{i'n}\,\alpha_{l'r}\,A_{mnr} = \delta_{mn}\,\alpha_{l'r}\,A_{mnr} = \alpha_{l'r}\,A_{mmr}.$$

Из этой формулы преобразования следует, что величины A_{iil} определяют вектор.

Сформулируем общее правило относительно свертывания. *При свертывании по двум индексам тензора ранга n получается тензор ранга n — 2.*

Операцию свертывания можно применять к тензору несколько раз, до тех пор, пока его ранг не станет меньшим двух.

Тензор четного ранга может быть свернут до скаляра, а тензор нечетного ранга — только до вектора.

Умножение тензоров с последующим свертыванием по индексам, относящимся к различным множителям — тензорам, называется иногда скалярным «внутренним» произведением тензоров.

Мы уже приводили примеры «внутренних» произведений (см. гл. 2):

$$a_{ik}B_k = A_i,$$

$$\lambda_{iklm}B_{lm} = A_{ik}.$$

Скалярное произведение двух векторов является произведением двух тензоров 1-го ранга с последующим свертыванием.

При свертывании тензоров, компоненты которых рассматриваются в общих системах координат, важно помнить, что *свертывание может производиться только по парам разноименных индексов*, т. е. один свертываемый индекс должен быть «ковариантным», а другой обязательно «контравариантным». Это следует из требования о том, что результат свертывания тензора должен оставаться тензором.

Действительно, пусть, например, мы произвели свертку тензора $A_i^{\cdot\, kl}$ по индексам i и k; тогда величины $A_i^{\cdot\, il}$ будут тоже компонентами тензора (вектора), ибо в силу (2.36) и (1.7) имеем

$$A_i'^{\cdot\, il} = \alpha_{i'}^{n}\alpha_{m}^{i'}\alpha_{r}^{l'}A_n^{\cdot\, mr} = \alpha_r^{l'}A_n^{\cdot\, nr}.$$

Свертка же $A_i^{\cdot\, kl}$ по индексам k и l дает величины, закон преобразования которых

$$A_i'^{\cdot\, kk} = \alpha_{i'}^{n}\alpha_{m}^{k'}\alpha_{r}^{k'}A_n^{\cdot\, mr}$$

указывает на то, что три величины $A_i'^{\cdot\, kk}$ не образовывают вектора.

«Внутреннее» произведение тензоров, отнесенных к произвольным системам координат, могут быть образованы только из компонент с разноименными индексами. Например,

$$A_{ik}B^k = A^i$$

$$\lambda_{ik}^{\cdot\cdot\, lm}B_{lm} = \lambda_{ik\cdot\, m}^{\cdot\cdot\, l}B_l^{\cdot\, m} = \lambda_{iklm}B^{lm} = A_{ik}.$$

3. 4. Свойство симметрии тензоров

Понятие симметрии относится к тензорам ранга не менее двух.

Тензор $S_{ikl}\dots$ называется *симметричным* по паре индексов, например i и k, если компоненты, получающиеся при перестановке этих индексов, равны друг другу, т. е.

$$S_{ikl}\dots = S_{kil}\dots .$$

Таким образом,

$$S_{12l}\dots = S_{21l}\dots; \quad S_{23l} = S_{32l}\dots \text{ и т. д.}$$

Тензор A_{ikl} называется *антисимметричным* по паре индексов, если при их перестановке компоненты меняют знак, т. е.

$$A_{ikl}\dots = -A_{kil}\dots .$$

Таким образом,

$$A_{12l}\dots = -A_{21l}\dots; \; A_{23l}\dots = -A_{32l}\dots \text{ и т. д.}$$

У антисимметричного тензора компоненты с равными индексами, по которым имеет место антисимметрия, равны нулю. Если $A_{ikl}\dots = -A_{kil}\dots$, то, например,

$$A_{11l} = -A_{11l\dots}, \text{ т. е. } A_{11l\dots} = 0.$$

Свойство симметрии или антисимметрии не зависит от выбора системы координат.

Таким образом, тензор, симметричный (антисимметричный) в какой-либо системе координат, остается симметричным (антисимметричным) в любой другой системе координат.

Доказательство этого утверждения следует из закона преобразования тензора.

Действительно, если тензор T_{ik} симметричен в системе (K), т. е. $T_{ik} = T_{ki}$, то

$$T'_{ik} = a_{i'l}\, a_{k'm}\, T_{lm} = a_{i'l}\, a_{k'm}\, T_{ml} = T'_{ki}\,.$$

Аналогично показывается инвариантность свойства антисимметрии по отношению к выбору системы координат.

Симметричный S_{ik} и антисимметричный A_{ik} тензоры второго ранга имеют матрицы следующего вида:

$$\|S_{ik}\| = \begin{Vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{Vmatrix}; \quad \|A_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{Vmatrix}$$

Антисимметричный тензор 2-го ранга называется бивектором.

Любой тензор T_{ik} может быть представлен в виде суммы симметричного тензора S_{ik} и антисимметричного A_{ik}.

Доказательство следует из очевидного равенства

$$T_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}), \tag{3.1}$$

Тензор

$S_{ik} \equiv \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki})$ — симметричный тензор, ибо $S_{ik} = S_{ki}$.

Тензор

$A_{ik} \equiv \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki})$ — антисимметричный, ибо $A_{ik} = - A_{ki}$.

Утверждение доказано.

Перестановка индексов, симметрирование и альтернирование

Компоненты тензора, например коварнантного T_{ik}, можно рассматривать как элементы квадратной матрнцы

$$\left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{matrix} \right\|$$

Еслн в тензоре T_{ik} поменять местамн нндексы, то получится новый тензор T_{ki}, матрнца которого

$$\left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{matrix} \right\|$$

будет транспоннрованной по отношению к матрице T_{ik} (столбцы станут строкамн); совокупность величнны T_{kl} будет преобразовываться по формулам (2.7).

Такнм образом, простейшая операцня — *перестановка индексов* — прнводнт к построеиию нового тензора. Очевндно, что для снмметрнчного тензора перестановка нндексов прнводнт к тому же тензору.

Симметрированием называется операция перестановкн пары нндексов и последующее сложенне полученного тензора с нсходным теизором. В результате получается тензор, снмметричный относительно прннятой пары индексов.

Альтернированием называется операцня перестановкн пары индексов и последующее вычнтание полученного тензора из нсходного; при этом получается антнснмметрнчный тензор относительно прння:ой пары индексов.

Как было показано (3.1), снмметрнчная часть S_{ik} тензора T_{ik} равиа половнне от результата снмметрнрования, а антнсимметрнчная A_{ik} — половине от результата альтерннрования.

Наличие у тензора свойства симметрии уменьшает число его независимых компонент.

Число независимых компонент симметричного тензора 2-го ранга равно 6, антисимметричного 2-го ранга — равно 3.

Примером симметричного тензора 2-го ранга может служить единичный тензор δ_{ik}.

Примером антисимметричного тензора 2-го ранга может служить тензор

$$C_{ik} = A_i B_k - A_k B_i,$$

где A_i и B_i — компоненты двух векторов.

Свойства симметрии и антисимметрии тензоров, отнесенных к системам обобщенных координат, устанавливаются по парам одноименных (ковариантных или контравариантных) индексов. Так тензор $A_{ik}^{\cdot\cdot l}$ — симметричен, а $B_{ik}^{\cdot\cdot l}$ — антисимметричен, если

$$A_{ik}^{\cdot\cdot l} = A_{ki}^{\cdot\cdot l}, \quad B_{ik}^{\cdot\cdot l} = -B_{ki}^{\cdot\cdot l}.$$

Все остальные положения этого параграфа имеют силу и для тензоров, рассматриваемых в системах обобщенных координат.

Эквивалентность антисимметричного тензора аксиальному вектору. Наличие у антисимметричного тензора только трех независимых компонент и специфический закон их преобразования позволяют сопоставить такому тензору некоторый аксиальный вектор, определяемый этими тремя компонентами.

Покажем, что формулы преобразования компонент антисимметричного тензора сводятся к формулам преобразования некоторого аксиального вектора.

Пусть имеем антисимметричный тензор A_{ik}. Тогда в новой системе координат его компоненты A'_{ik} будут:

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}A_{lm} = \alpha_{i'1}\alpha_{k'2}A_{12} +$$

$$+ \alpha_{i'2}\alpha_{k'1}A_{21} + \alpha_{i'1}\alpha_{k'3}A_{13} + \alpha_{i'3}\alpha_{k'1}A_{31} +$$

$$+ \alpha_{i'2}\alpha_{k'3}A_{23} + \alpha_{i'3}\alpha_{k'2}A_{32}.$$

Эту формулу можно записать, используя равенство $A_{lm} = -A_{ml}$ в виде

$$A'_{ik} = (\alpha_{i'l}\alpha_{k'm} - \alpha_{i'm}\alpha_{k'l})\,A_{lm}, \tag{3.2}$$

где индексы l и m в сумме справа могут принимать только циклические перестановки: 12, 23, 31.

Введем обозначения для компонент тензора:

$$A_{12} = -A_{21} \equiv A_3, \quad A_{31} = -A_{13} = A_2; \quad A_{23} = -A_{32} \equiv A_1$$

или короче

$$A_{lm} \equiv A_n,$$

где индексы l, m, n составляют циклические перестановки.

Аналогично в новой системе компоненты тензора обозначим следующим образом:

$$A'_{ik} \equiv A'_r,$$

где индексы i, k, r составляют также циклические перестановки.

Тогда формулу (3.2) можно записать

$$A'_r = \sum_{(l,\,m,\,n)} (\alpha_{i'l}\alpha_{k'm} - \alpha_{i'm}\alpha_{k'l})\,A_n. \tag{3.3}$$

Здесь индексы (r, i, k) и (l, m, n) составляют циклические перестановки чисел (1, 2, 3), а справа стоит сумма по циклическим перестановкам индексов (l, m, n), т. е. всего три слагаемых.

Раскладывая орты $\boldsymbol{i}'_l$ новой системы (K') по ортам старой системы $\boldsymbol{i}_l$, получим $\boldsymbol{i}'_l = \alpha_{l'l}\boldsymbol{i}_l$.

Поэтому, вычисляя векторное произведение ортов системы (K'), получим

$$\boldsymbol{i}'_l \times \boldsymbol{i}'_k = \alpha_{l'l}\,\alpha_{k'm}\,(\boldsymbol{i}_l \times \boldsymbol{i}_m),$$

где справа стоит сумма по всем значениям l и m. Умножая это выражение скалярно на $\boldsymbol{i}_n$, получим

$$(\boldsymbol{i}'_l \times \boldsymbol{i}'_k)\cdot \boldsymbol{i}_n = \alpha_{l'l}\,\alpha_{k'm}\,(\boldsymbol{i}_l \times \boldsymbol{i}_m)\cdot \boldsymbol{i}_n,$$

причем при фиксированном индексе n здесь справа стоит только пара слагаемых (когда среди l, m, n нет одинаковых индексов), отличающихся знаком.

Если старая система (K) была правой*, то

$$(\boldsymbol{i}'_l \times \boldsymbol{i}'_k)\cdot \boldsymbol{i}_n = \alpha_{l'l}\,\alpha_{k'm} - \alpha_{l'm}\,\alpha_{k'l}, \tag{3.4}$$

где индексы (l, m, n) составляют циклическую перестановку.

Если новая система (K') тоже правая, как и (K)**, то

$$\boldsymbol{i}'_l \times \boldsymbol{i}'_k = \boldsymbol{i}'_r$$

при циклической перестановке индексов (r, i, k).

Если же новая система (K') — левая, то

$$\boldsymbol{i}'_l \times \boldsymbol{i}'_k = -\boldsymbol{i}'_r$$

при циклической же перестановке индексов (r, i, k).

Итак: 1) если рассматривается преобразование координатной системы такое, что правая система переходит в правую же, то

$$(\boldsymbol{i}'_l \times \boldsymbol{i}_k)\cdot \boldsymbol{i}_n = \boldsymbol{i}'_r \cdot \boldsymbol{i}'_n = \alpha_{r'n}$$

при циклических перестановках индексов (r, l, k);

2) если преобразование системы (K) в (K') такое, что правая система переходит в левую, то

$$(\boldsymbol{i}'_l \times \boldsymbol{i}'_k)\cdot \boldsymbol{i}_n = -(\boldsymbol{i}'_r \cdot \boldsymbol{i}_n) = -\alpha_{r'n}.$$

Таким образом, формулу (3.4) можно записать в виде

$$\alpha_{r'n} = \pm(\alpha_{l'l}\,\alpha_{k'm} - \alpha_{i'm}\,\alpha_{k'l}),$$

где индексы (r, i, k) и (n, l, m) составляют циклические перестановки чисел (1, 2, 3).

Возвращаясь к формуле (3.3), теперь получим

$$A'_r = \pm\,\alpha_{r'n}\,A_n\left(\equiv \pm\sum_{n=1}^{3}\alpha_{r'n}A_n\right).$$

---

* Или левой, в которой направление векторного произведения определено по правилу левого винта (см. 1.4).

** Или «тоже левая, как и (K)» (см. предыдущую сноску).

Итак, прн преобразованнях правой координатной снстемы в правую нмеем:

$$A'_r = +\alpha_{r'n} A_n,$$

а прн преобразованиях правой коорднnатной снстемы в левую*

$$A'_r = -\alpha_{r'n} A_n.$$

С такнмн векторамн мы уже встречалнсь в главе первой прн рассмотреннн векторного пронзведення; это — акснальные векторы.

Такнм образом, компоненты *антисимметричного тензора преобразуются как компоненты аксиального вектора.*

Есть скаляры и тензоры более высоких рангов, формулы преобразовання компонент которых меняют знак при преобразованиях, переводящнх правую систему в левую. Все эти тензоры называются *псевдотензорами*; на свойствах псевдотензоров мы подробно остановнмся в § 9 этой главы.

3.5. Единичный тензор. Метрический тензор

В предыдущей главе было показано (см. § 2.4 пример 2), что известный из алгебры символ Кронекера δ_{ik} является тензором 2-го ранга с матрицей.

$$\|\delta_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad \delta_{ik} = \alpha_{i'i}\alpha_{i'k} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k; \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Тензор δ_{ik} носит название единичного тензора.

По смыслу определения единичного тензора его *компоненты равны либо нулю* ($i \neq k$), *либо единице* во всех координатных системах. Это следует из определения δ_{ik} и δ'_{ik} (см. 2.5).

Умножение δ_{ik} на тензор с последующим свертыванием часто используется в алгебраических выкладках. Например,

$$A_{ik}B_k - B_i = A_{ik}B_k - \delta_{ik}B_k = (A_{ik} - \delta_{ik}) B_k$$
$$(\text{ибо } B_i \equiv \delta_{ik}B_k).$$

В определенном смысле метрнческнй тензор является обобщеннем понятня единнчиого тензора δ_{ik}. Прежде всего, заметнм, что квадрат лннейного элемента в прямоугольных декартовых коорднnатах может быть запнсан в внде

$$ds^2 = \delta_{ik} dx_i dx_k,$$

в то время как в пронзвольных коорднnатах нмеем

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k.$$

Кроме того, из определення

$$\delta_{ik} = i_i \cdot i_k$$

* Илн левой снстемы в правую.

следует, что компоненты δ_{ik} представляют собой косинусы углов между осями одной какой-то координатной системы (декартовой прямоугольной). Тензор δ_{ik} может быть определен через $\alpha_{i'k}$ — косинусы углов между осями двух произвольных декартовых прямоугольных систем (см. 2.5), причем $\alpha_{i'k} = i'_i \cdot i_k$.

В случае введения произвольных базисов, определяющих системы обобщенных координат, компоненты метрического тензора определяются через всевозможные произведения векторов основного и взаимного базиса одной и той же системы координат:

$$g_{ik} = e_i \cdot e_k = |e_i|\,|e_k| \cos(e_i,\ e_k);$$
$$g^{ik} = e^i \cdot e^k = |e^i|\,|e^k| \cos(e^i,\ e^k);$$
$$g_i^{\cdot k} = e_i \cdot e^k = |e_i|\,|e^k| \cos(e_i,\ e^k).$$

При этом, поскольку векторы e_i и e^i не являются ортами, то компоненты g^{ik}, g_{ik}, $g_i^{\cdot k}$ определяют косинусы углов между осями базисов только с точностью до множителей.

Что касается коэффициентов прямого $\alpha^k_{i'}$ и обратного $\alpha^{k'}_i$ преобразований, то они также с точностью до множителей определяют косинусы углов между осями *разноименных базисов двух различных систем координат*:

$$\alpha^k_{i'} = e'_i \cdot e^k = |e'_i|\,|e^k| \cos(e'_i,\ e^k);$$
$$\alpha^{k'}_i = e_i \cdot e'^k = |e_i|\,|e'^k| \cos(e_i,\ e'^k).$$

Через эти коэффициенты могут быть выражены смешанные компоненты метрического тензора.

$$g_i^{\cdot k} = \alpha^{l'}_i \alpha^k_{l'}. \qquad (*)$$

Это следует, например, из (1.5) и определений (1.39).
Умножив (1.5) на e^l, получим

$$e_j \cdot e^l = \sum_{k=1}^{3} \alpha^{k'}_j e'_k \cdot e^l,$$

откуда — равенство (*).

Из определений единичного и метрического тензоров следует:

1) единичный тензор симметричный ($\delta_{ik} = \delta_{ki}$);
2) метрический тензор симметричный ($g^{ik} = g^{ki}$; $g_{ik} = g_{ki}$).

3.6. Главные оси тензора. Приведение тензора к главным осям

Вопрос о главных осях тензора имеет важное значение в механике.

Рассмотрим произвольный тензор 2-го ранга T_{ik}. Если этот тензор умножить на вектор A и произвести свертывание по индексу вектора и одному индексу тензора, то в результате получаем некоторый вектор B с компонентами

$$B_i = T_{ik} A_k.$$

Можно говорить, что тензор T_{ik}, будучи умножен скалярно на некоторый вектор A, преобразует его в новый вектор B в том смысле, что из компонент вектора A определенным действием получаются компоненты другого вектора — вектора B Вектор B вообще отличен от A по величине и направлению. Таким образом, тензор при умножении на вектор изменяет длину этого вектора и поворачивает его.

Поставим задачу отыскать для заданного тензора T_{ik} такие векторы A, которые бы не поворачивались этим тензором, а только изменяли длину. Тогда

$$T_{ik}A_k = \lambda A_i,$$

где λ — скаляр.

Физический смысл этой задачи поясним на некоторых примерах.

Напряжение на площадке с нормалью n равно (см. гл. 2)

$$p_{nk} = p_{ik}n_i,$$

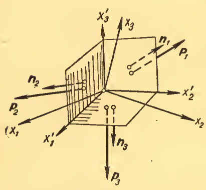


Рис. 3.1. Главные оси тензора напряжений p_{ik} в точке M; на площадках, перпендикулярных к осям x_1', x_2', x_3', касательные напряжения равны нулю

причем, вообще вектор p_n не параллелен орту n, т. е. на каждой площадке есть как нормальные, так и касательные напряжения.

Интерес представляют такие площадки, на которых есть только нормальные напряжения, а касательные равны нулю (рис. 3.1). Для этих площадок

$$p_n \parallel n \text{ или } \lambda n = p_n = p_i n_i.$$

Тогда ориентация этих площадок (орты n) определится из системы уравнений

$$\lambda n_k = p_{ik}n_i.$$

Если диэлектрические свойства среды определяются тензором ε_{ik}, то возникает вопрос как следует направить электрическое поле E, чтобы электрическая индукция D была направлена по вектору напряженности E?

Общий вид зависимости D от E имеет линейный характер, так что

$$D_i = \varepsilon_{ik}E_k.$$

Поставленная задача требует отыскания векторов E, удовлетворяющих уравнениям

$$\lambda E_i = \varepsilon_{ik}E_k.$$

Если существуют для тензора T_{ik} векторы $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\lambda A_i = T_{ik} A_k, \tag{3.5}$$

то направления, определяемые этими векторами, называются *главными* (*собственными*) *направлениями тензора* T_{ik}. Оси этих направлений носят названия *главных осей тензора*.

Значения компонент тензора в координатной системе главных осей называются *главными значениями*.

Прежде чем переходить к задаче отыскания главных осей и главных значений компонент тензора в общем случае, рассмотрим простейший пример тензора 2-го ранга на плоскости.

Пусть I_{ik} — тензор моментов инерции (относительно осей с началом в точке O) системы материальных точек с массами m_n, расположенных в плоскости (x_1, x_2) (рис. 3.2). Этот тензор является плоским, он имеет только четыре компоненты. Матрица этого тензора имеет вид

$$\|I_{ik}\| = \begin{Vmatrix} I_{11}, & I_{12} \\ I_{21}, & I_{22} \end{Vmatrix},$$

где

$$I_{11} = \sum_{n=1}^{N} m_n x_1^{(n)2};$$

$$I_{22} = \sum_{n=1}^{N} m_n x_2^{(n)2};$$

$$I_{12} = -\sum_{n=1}^{N} m_n x_1^{(n)} x_2^{(n)} = I_{21}.$$

Рис. 3.2. Главные оси тензора моментов инерции плоской системы материальных точек

Если вектор $\boldsymbol{A}$ направлен по главной оси этого тензора, то согласно (3.5) его компоненты A_1, A_2 должны удовлетворять системе однородных уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda A_1 &= I_{11} A_1 + I_{12} A_2; \\ \lambda A_2 &= I_{12} A_1 + I_{22} A_2. \end{aligned} \tag{*}$$

Эта система имеет нетривиальное (отличное от нуля) решение только в том случае, если

$$\begin{vmatrix} I_{11} - \lambda & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - \lambda (I_{11} + I_{22}) + I_{11} I_{22} - I_{12}^2 = 0. \tag{**}$$

Следовательно, система (*) имеет отличное от нуля решение тогда и только тогда, если $\lambda = \lambda_1$, или $\lambda = \lambda_2$, где λ_1 и λ_2 — корни уравнения (**), т. е.

$$\lambda_1 = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2};$$

$$\lambda_2 = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2}.$$

Если $I_{12} = 0$, то тогда исходные оси (x_1) и (x_2), как это следует из (*) и (3.5), являются уже главными.

Поскольку имеется два различных λ, удовлетворяющих системе (*) при $A_i \neq 0$, т. е. и два различных главных направления, определяемые векторами $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$. Направления этих векторов и определяются из системы (*):

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{\lambda_1 - I_{11}}{I_{12}} = \frac{I_{12}}{\lambda_1 - I_{22}};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{\lambda_2 - I_{11}}{I_{12}} = \frac{I_{12}}{\lambda_2 - I_{22}}.$$

Здесь φ_1 и φ_2 — углы, которые составляют главные оси тензора I_{ik} с осью (x_1).

Подставляя сюда значения λ_1 и λ_2 и вычисляя $\operatorname{tg} 2\varphi_1$ и $\operatorname{tg} 2\varphi_2$, получим

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \operatorname{tg} 2\varphi_2 = \frac{2I_{12}}{I_{11} - I_{22}}.$$

Отсюда $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, так что главные оси взаимно перпендикулярны.

В системе главных осей тензор I_{ik} имеет компоненты

$$I'_{11} = \lambda_1;$$

$$I'_{22} = \lambda_2; \qquad (***)$$

$$I'_{12} = 0,$$

что можно проверить непосредственным вычислением. Это следует и из соотношений (*), записанных в системе главных осей:

$$\lambda_1 A_1^{(1)'} = I'_{11} A_1^{(1)'} + I'_{12} A_2^{(1)'};$$

$$\lambda_1 A_2^{(1)} = I'_{12} A_1^{(1)} + I'_{22} A_2^{(1)'};$$

$$\lambda_2 A_1^{(2)'} = I'_{11} A_1^{(2)'} + I'_{12} A_2^{(2)'};$$

$$\lambda_2 A_2^{(2)'} = I'_{12} A_1^{(2)'} + I'_{22} A_2^{(2)'}.$$

Так как $A_1^{(1)'} = |A^{(1)}|$; $A_2^{(1)'} = 0$; $A_1^{(2)'} = 0$; $A_2^{(2)'} = |A^{(2)}|$, то получим выражения (***). Используя этот факт, можно в данном случае проще подойти к задаче отыскания главных осей тензора I_{ik}.

Зная, что главные оси взаимно перпендикулярны и что в системе главных осей $I'_{12} = 0$, выберем новую систему осей (X'_1, X'_2) такую, чтобы в ней компонента тензора I'_{12} обращалась в нуль.

По общей формуле (2.7) имеем:

$$I'_{12} = \alpha_{1'l}\alpha_{2'k}I_{lk}.$$

Все косинусы $\alpha_{i'k}$ могут быть выражены через функции одного параметра — угла φ, который составляет новая ось (X'_1) со старой осью (x_1). Действительно (рис. 3.2):

$$\alpha_{1'1} = \cos\varphi; \quad \alpha_{1'2} = \sin\varphi;$$
$$\alpha_{2'2} = \cos\varphi; \quad \alpha_{2'1} = -\sin\varphi.$$

Таким образом, (ср. § 2.6)

$$I'_{12} = \alpha_{1'1}\alpha_{2'1}I_{11} + \alpha_{1'2}\alpha_{2'2}I_{22} + \alpha_{1'1}\alpha_{2'2}I_{12} + \alpha_{1'2}\alpha_{2'1}I_{21} = -\sin\varphi\cos\varphi I_{11} +$$
$$+ \sin\varphi\cos\varphi I_{22} + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) I_{12} = \frac{I_{22} - I_{11}}{2}\sin 2\varphi + I_{12}\cos 2\varphi.$$

Чтобы $I'_{12} = 0$, необходимо

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2I_{12}}{I_{11} - I_{22}}.$$

Этим полностью определяется положение главных осей тензора I_{lk}. Главные значения этого тензора I'_{11} и I'_{22} равны:

$$I'_{11} = \alpha_{1'l}\alpha_{1'k}I_{lk} = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2} \quad (=\lambda_1);$$

$$I'_{22} = \alpha_{2'l}\alpha_{2'k}I_{lk} = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2} \quad (=\lambda_2).$$

Таким образом, в системе главных осей (X'_1, X'_2) тензор I'_{ik} имеет матрицу

$$\| I'_{ik} \| = \left\| \begin{matrix} I'_{11} & 0 \\ 0 & I'_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Рассмотрим вопрос об определении главных направлений и главных значений тензора T_{ik}.

Согласно (3.5) компоненты векторов A, определяющих главные оси тензора T_{ik}, удовлетворяют системе трех однородных уравнений:

$$T_{ik}A_k - \lambda A_i = (T_{ik} - \lambda\delta_{ik}) A_k = 0,$$

или

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda) A_1 + \quad T_{12}A_2 \quad + \quad T_{13}A_3 \quad &= 0; \\ T_{21}A_1 \quad + (T_{22} - \lambda) A_2 + \quad T_{23}A_3 \quad &= 0; \\ T_{31}A_1 \quad + \quad T_{32}A_2 \quad + (T_{33} - \lambda) A_3 &= 0. \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Эта однородная система служит для определения A_1, A_2, A_3. При этом ищется отличное от нуля или, как говорят, нетривиальное решение этой системы.

Как известно из алгебры, однородная система имеет не-

тривиальное решение только в том случае, если определитель ее равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.7)$$

Равенство нулю определителя (3.7) представляет собой кубическое уравнение относительно λ. Это уравнение называется *характеристическим уравнением тензора* T_{ik}.

Таким образом, чтобы удовлетворить системе (3.6), необходимо и достаточно, чтобы λ была корнем кубического уравнения (3.7). Корни этого уравнения, может случиться, не будут все действительными и тогда его решение не позволит определить трех главных направлений.

При отнесении тензора к системам обобщенных координат, можно использовать его любые компоненты для определения его главных направлений и значений. Например, если определены ковариантные компоненты T_{ik} тензора, то уравнение, определяющее собственные вектора A тензора T_{ik}, имеет вид (см. 3.5)

$$\lambda A_i = T_{ik} A^k. \qquad (3.7,\ a)$$

Отсюда в силу $A_i = g_{ik} A^k$ получаем систему линейных однородных уравнений относительно A^i вида (см. 3,6)

$$(T_{ik} - \lambda g_{ik})\, A^k = 0.$$

Однако, чтобы привести эту систему к виду (3.6), необходимо пользоваться смешанными компонентами тензора. Умножив предыдущие уравнения ($i = 1, 2, 3$) на $g_i^{\cdot l}$, просуммировав по i, получим в силу (2.37):

$$(T_k^{\cdot l} - \lambda g_k^{\cdot l})\, A^k = 0. \qquad (3.7,\ б)$$

Тогда для определения собственных значений тензора получаем характеристическое уравнение вида

$$\begin{vmatrix} T_1^{\cdot 1}-\lambda & T_1^{\cdot 2} & T_1^{\cdot 3} \\ T_2^{\cdot 1} & T_2^{\cdot 2}-\lambda & T_2^{\cdot 3} \\ T_3^{\cdot 1} & T_3^{\cdot 2} & T_3^{\cdot 3}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.7,\ в)$$

Остановимся на рассмотрении только симметричных тензоров второго ранга, отнесенных к прямоугольным декартовым системам координат, так что $T_{ik} = T_{ki}$.

В этом случае все корни λ_1, λ_2, λ_3 характеристического уравнения (3.7, *а*) вещественные.

Действительно, пусть λ – какой-либо из корней уравнения (3.7) и пусть ему отвечают в силу уравнения (3.6) какие-то величины A_i вообще комплексные.

Тогда, умножив каждое ($i = 1, 2, 3$) из тождеств

$$\lambda A_i \equiv T_{ik} A_k$$

на величины $\overline{A}_i$, комплексно сопряженные с A_i, и просуммировав по i, получим

$$\lambda A_i \overline{A}_i = T_{ik} A_k \overline{A}_i. \qquad (*)$$

Так как $T_{ik} = T_{ki}$, то

$$T_{ik} A_k \bar{A}_i = \frac{1}{2}(T_{ik} A_k \bar{A}_i + T_{ik} A_k \bar{A}_i) = \frac{1}{2}(T_{ik} A_k \bar{A}_i + T_{ki} \bar{A}_k A_i) =$$

$$= \frac{1}{2} T_{ik} (A_k \bar{A}_i + \bar{A}_k A_i).$$

Отсюда видно, что сумма $T_{ik}A_k\bar{A}_i$ вещественна, ибо все T_{ik} вещественны и выражение в скобках вещественно. Поскольку и $A_i\bar{A}_i = |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2$ — тоже вещественная величина, то из (*) следует, что корень λ вещественен. При этом, конечно, все компоненты A_k тоже вещественны (это следует из $\lambda A_i = T_{ik} A_k$).

Итак λ_1, λ_2, λ_3 — вещественные числа.

Заметим, что если T_{ik} — ковариантные компоненты тензора, то исходя из (3.7, *а*), умножая его на $\bar{A}_i$, суммируя по i и используя $T_{ik} = T_{ki}$, аналогично предыдущему получим вещественность корней характеристического уравнения (3.7 *в*).

Рассмотрим случай различных корней $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Тогда каждому из скаляров λ_s отвечает своя система чисел $A_1^{(s)}$, $A_2^{(s)}$, $A_3^{(s)}$—компонент вектора $\boldsymbol{A}^{(s)}$, которые с точностью до постоянного множителя определяются из системы уравнений ($i = 1, 2, 3$):

$$(T_{ik} - \lambda_s \delta_{ik}) A_k^{(s)} = 0$$

Например, для $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, $A_3^{(1)}$ имеем

$$(T_{11} - \lambda_1) A_1^{(1)} + T_{12} A_2^{(1)} + T_{13} A_3^{(1)} = 0;$$
$$T_{21} A_1^{(1)} + (T_{22} - \lambda_1) A_2^{(1)} + T_{23} A_3^{(1)} = 0;$$
$$T_{31} A_1^{(1)} + T_{32} A_2^{(1)} + (T_{33} - \lambda_1) A_3^{(1)} = 0.$$

Отсюда получим

$$\frac{A_1^{(1)}}{\begin{vmatrix} T_{22} - \lambda_1 & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} - \lambda_1 \end{vmatrix}} = \frac{A_2^{(1)}}{\begin{vmatrix} T_{23} & T_{21} \\ T_{33} - \lambda_1 & T_{31} \end{vmatrix}} = \frac{A_3^{(1)}}{\begin{vmatrix} T_{21} & T_{22} - \lambda_1 \\ T_{31} & T_{32} \end{vmatrix}}, \tag{3.8}$$

Эти равенства однозначно определяют лишь направление вектора $\boldsymbol{A}^{(1)}$, т. е. направление первой главной оси тензора. Остальные два главных направления тензора T_{ik} определяются векторами $\boldsymbol{A}^{(2)}$, $\boldsymbol{A}^{(3)}$.

Важное значение имеет тот факт, что все три главных оси тензора взаимно перпендикулярны.

Для случая различных корней $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ это доказывается просто.

Действительно, если корню λ_1 отвечает вектор $\boldsymbol{A}^{(1)}$, а корню λ_2 — вектор $\boldsymbol{A}^{(2)}$, то

$$T_{ik} A_k^{(1)} = \lambda_1 A_i^{(1)};$$
$$T_{ik} A_k^{(2)} = \lambda_2 A_i^{(2)}.$$

Умножим первую группу этих равенств на $A_i^{(2)}$, вторую —

на $A_i^{(1)}$, просуммируем по i и вычтем одну сумму из другой:

$$T_{ik} A_k^{(1)} A_i^{(2)} - T_{ik} A_k^{(2)} A_i^{(1)} = (\lambda_1 - \lambda_2) A_i^{(1)} A_i^{(2)}.$$

Так как $T_{ik} = T_{ki}$, то отсюда имеем:

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) A_i^{(1)} A_i^{(2)}.$$

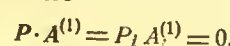
Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $A_i^{(1)} A_i^{(2)} = \boldsymbol{A}^{(1)} \cdot \boldsymbol{A}^{(2)} = 0$, т. е. $\boldsymbol{A}^{(1)} \perp \boldsymbol{A}^{(2)}$.

Если среди корней характеристического уравнения (3.7) имеются кратные, то существование трех взаимно перпендикулярных главных направлений доказывается следующим путем.

Пусть λ_1 — какой-либо корень уравнения (3.7) и $\boldsymbol{A}^{(1)}$ — вектор, определяющий главное направление, соответствующее этому главному значению тензора, т. е.

$$\lambda_1 A_i^{(1)} = T_{ik} A_k^{(1)}.$$

Рассмотрим плоскость M (рис. 3.3), перпендикулярную вектору $\overline{\boldsymbol{A}}^{(1)}$. Если брать векторы из плоскости M, то тензор T_{ik} переводит эти векторы в другие, которые лежат *в той же плоскости* M. Действительно, пусть $\boldsymbol{P}$ — вектор в плоскости M, так что



$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}^{(1)} = P_i A_i^{(1)} = 0.$$

Тогда

$$T_{ik} A_k^{(1)} P_i = \lambda_1 A_i^{(1)} P_i = 0.$$

Отсюда следует, что вектор $\boldsymbol{Q}$ с компонентами $Q_k = T_{ik} P_i$ ортогонален к $A^{(1)}$ (ибо $Q_k A_k^{(1)} = 0$) и, значит, лежит в той же плоскости M.

Введем декартову систему координат (x_1^*, x_2^*, x_3^*), так что ось (x_3^*) направлена по $A^{(1)}$, а две других оси лежат в плоскости M.

В этой системе координат векторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ имеют только по две компоненты: P_1^*, P_2^* и Q_1^*, Q_2^*, а тензор T_{ik} имеет компоненты, определяемые матрицей

$$\| T_{ik} \| = \begin{Vmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* \end{Vmatrix};$$

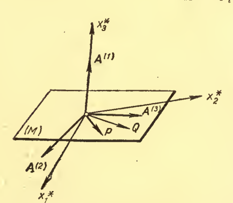


Рис. 3.3. Три взаимно перпендикулярные главные оси симметрии тензора. Их существование устанавливается независимо от кратности корней характеристического уравнения

$$T_{12}^* = T_{21}^*,$$

ибо $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ лежат в *плоскости* M, а вместо девяти компонент симметричного тензор^ T_{ik} мы вправе рассматривать только четыре его компоненты (тензор и юскости M), которые и осуществляют перевод векторов из плоскостч . в векторы, лежащие в той же плоскости (плоскость M — координатная плоскость x_1^*, x_2^*).

Теперь будем искать в плоскости M такие векторы $\boldsymbol{P}$, которые бы не поворачивались тензором T_{ik}^*, а лишь изменяли свою длину. Тогда получим

систему *двух* уравнений

$$\lambda A_i^* = T_{ik}^* A_k^*$$

и характеристическое уравнение второго порядка

$$\begin{vmatrix} T_{11}^* - \lambda & T_{12}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть λ_2 — корень этого уравнения, а вектор $A^{(2)}$ соответствует λ_2, т. е.

$$\lambda_2 A_i^{(2)*} = T_{ik}^* A_k^{(2)*}.$$

Тогда вектор $A^{(2)}$ определяет второе главное направление тензора T_{ik}, и поскольку он лежит в плоскости M, то

$$A^{(2)} \perp A^{(1)}.$$

Построим вектор $A^{(3)}$, перпендикулярный к $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$. Покажем, что $A^{(3)}$ определит третье главное направление тензора T_{ik}.

Действительно, вектор $T_{ik}^* A_3^{(3)*}$ перпендикулярен $A^{(1)}$ (ибо он лежит в плоскости M) и перпендикулярен к $A^{(2)}$ (ибо $T_{ik}^* A_k^{(3)*} A_i^{(2)*} = T_{ki}^* A_k^{(2)*} A_k^{(3)*} = \lambda_2 A_k^{(2)*} A_k^{(3)*} = 0$, поскольку векторы $A^{(2)}$ и $A^{(3)}$ взаимно перпендикулярны). Следовательно, вектор с компонентами $T_{ik}^* A_k^{(3)*}$ коллинеарен вектору $A^{(3)}$, т. е.

$$\lambda_3 A_i^{(3)} = T_{ik}^* A_k^{(3)*}.$$

Это и означает, что $A^{(3)}$ определяет третье главное направление тензора T_{ik}.

При таком построении главных направлений $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ тензора T_{ik} нигде не требовалось, чтобы λ_1, λ_2, λ_3 были различными. Таким образом, существование трех взаимно перпендикулярных главных осей у симметричного тензора T_{ik} показано независимо от кратности корней характеристического уравнения (3.7).

Выясним связь между корнями характеристического уравнения (3.7) λ_1, λ_2, λ_3 и компонентами тензора. Для этого приведем тензор к главным осям, т. е. найдем выражение компонент тензора в системе координат, оси которой являются главными осями тензора.

Пусть $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ — орты главных осей тензора

$$\left(N^{(i)} = \frac{A^{(i)}}{|A^{(i)}|} \right).$$

Если (X_1'), (X_2'), (X_3')—главные оси (рис. 3.4), то:

$$T_{ik} N_k^{(1)} = \lambda_1 N_i^{(1)};$$

$$T_{ik} N_k^{(2)} = \lambda_2 N_i^{(2)};$$

$$T_{ik} N_k^{(3)} = \lambda_3 N_i^{(3)}.$$

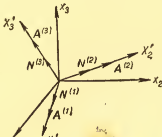


Рис. 3.4. Главные оси симметричного тензора

Запишем эти равенства в системе координат (X'_1, X'_2, X'_3), т. е. в системе главных осей тензоров.
Имеем:

$$T'_{ik} N_k^{(1)'} = \lambda_1 N_i^{(1)'};$$
$$T'_{ik} N_k^{(2)'} = \lambda_2 N_i^{(2)'};$$
$$T'_{ik} N_k^{(3)'} = \lambda_3 N_i^{(3)'}.$$

Отсюда, полагая $i = 1, 2, 3$, получим девять равенств (учитывая, что $N_1^{(1)'} = N_2^{(2)'} = N_3^{(3)'} = 1$ и $N_m^{(n)'} = 0$ при $m \neq n$):

$$T'_{11} = \lambda_1;\ T'_{12} = T'_{21} = T'_{31} = T'_{23} = T'_{32} = 0;\ T'_{22} = \lambda_2;\ T'_{33} = \lambda_3.$$

Следовательно, тензор в системе своих главных осей имеет матрицу

$$\| T'_{ik} \| = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, корни λ_1, λ_2, λ_3 характеристического уравнения представляют диагональные компоненты (единственные отличные от нуля) тензора в системе главных осей; они и дают *главные (собственные) значения тензора.*

Для тензора напряжений его главные значения носят название *главных напряжений.*

Пусть вектор $\boldsymbol{P}$ переводится при помощи тензора T_{ik} в вектор $\boldsymbol{Q}$, так что

$$Q_i = T_{ik} P_k.$$

В системе главных осей (X'_1, X'_2, X'_3) тензора T_{ik} это уравнение имеет вид

$$Q'_i = T'_{ik} P'_k,$$

или

$$\left.\begin{aligned} Q'_1 &= T'_{11} P'_1 = \lambda_1 P'_1; \\ Q'_2 &= T'_{22} P'_2 = \lambda_2 P'_2; \\ Q'_3 &= T'_{33} P'_3 = \lambda_3 P'_3. \end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, то у тензора T_{ik} не существует других главных направлений, кроме тех, которые определяются корнями λ_1, λ_2, λ_3. При этом из (3.9) следует, что если $\boldsymbol{P}$ не совпадет ни с одним из главных направлений, то тензор T_{ik} не только изменяет длину этого вектора, но и поворачивает его. Если же, например, $\boldsymbol{P} \parallel A^{(1)}$, т. е. $P'_2 = P'_3 = 0$, то $\boldsymbol{Q} = \lambda_1 \boldsymbol{P}$ — вектор $\boldsymbol{P}$ не поворачивается, а только изменяет свою длину.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ (один корень характеристического уравнения кратный), то из (3.9) следует $(\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda)$:

$$Q'_1 = \lambda P'_1;$$
$$Q'_2 = \lambda P'_2;$$
$$Q'_3 = \lambda_3 P'_3.$$

Отсюда видно, что любой вектор $\boldsymbol{P}'^0$ из плоскости (X'_1, X'_2) (т. е. когда $P_3^{0'} = 0$) только изменяет длину при умножении на тензор T_{ik}, но не поворачивается, ибо при этом $\boldsymbol{Q} = \lambda \boldsymbol{P}^0$. Значит, двойному корню характеристического уравнения отвечает целая *собственная плоскость* (X'_1, X'_2), перпендикулярная третьему главному направлению, в этой плоскости любое направление будет главным. Таким образом, если одно главное направление определено (корнем λ_3), а два других корня совпадают, то два других главных направления

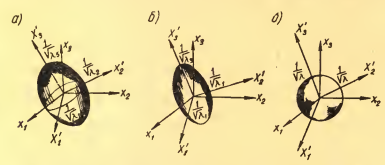


Рис. 3.5. Вид теизорного эллипсоида симметричиого теизора. Главные оси теизора — это главиые оси тензориого эллипсоида:

а) случай различных корией $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Матрица тензора в главных осях $\|T'_{ik}\| = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}$; б) случай двух равиых корией $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Матрнца тензора в главных осях $\|T'_{ik}\| = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}$; в) случай равных корней — шаровой тензор $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Матрнца тензора в любых осях

$$\|T_{ik}\| = \lambda \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

определяются любыми двумя направлениями, перпендикулярными к первому.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ — все корни характеристического уравнения совпадают, то из (3.9) для любого вектора $\boldsymbol{P}$ имеем:

$$Q'_1 = \lambda P'_1;$$
$$Q'_2 = \lambda P'_2; \text{ или } \boldsymbol{Q} = \lambda \boldsymbol{P}.$$
$$Q'_3 = \lambda P'_8;$$

Таким образом, в этом случае *любой вектор* при умножении на тензор T_{ik} только изменяет свою длину, но не по-

ворачивается. Следовательно, в этом случае любое направление у тензора T_{ik} является главным. Такой тензор называется *шаровым* (рис. 3.5, *в*).

Тензорный эллипсоид. Любому вектору A_i можно однозначно сопоставить плоскость вида $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r})=A_i x_i=1$ в том смысле, что три компоненты вектора A_i полностью определяют положение этой плоскости в любой системе координат.

Любому *симметричному** тензору $T_{ik}=T_{ki}$ можно однозначно сопоставить поверхность второго порядка вида

$$T_{ik}x^i x^k=1.$$

Компоненты тензора T_{ik} однозначно определяют поверхность 2-го порядка в любой системе координат. Эта поверхность носит название *тензорной* (рис. 3.5).

Нетрудно видеть, что главные оси тензора являются главными осями тензорной поверхности, которая в системе главных осей имеет уравнение

$$T'_{11}(X'_1)^2+T'_{22}(X'_2)^2+T'_{33}(X'_3)^2=\lambda_1(X'_1)^2+\lambda_2(X'_2)^2+\lambda_3(X'_3)^2=1,$$

или

$$\frac{(X'_1)^2}{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)}+\frac{(X'_2)^2}{\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)}+\frac{(X'_3)^2}{\left(\frac{1}{\lambda_3}\right)}=1.$$

Если λ_1, λ_2, λ_3 положительны (случай наиболее важный в приложениях), то тензорная поверхность является эллипсоидом, а $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$ — отрезки, отсекаемые на главных осях тензорной поверхностью.

Если $\lambda_1=\lambda_2$, то тензорный эллипсоид является эллипсоидом вращения.

Если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ (тензор T_{ik} — шаровой), то тензорный эллипсоид — шар.

3.7. Инварианты тензора

Компоненты вектора A_i меняются при изменении системы координат. Однако, при помощи этих компонент можно составить величину, которая остается неизменной при изменениях прямоугольной декартовой системы координат, а именно:

$$A_i A_i=A_1^2+A_2^2+A_3^2=A'_i A'_i.$$

---

* Если T_{ik} — не симметричный тензор, то однозначного соответствия между тензором и поверхностью не будет. Действительно, согласно (3.1) всегда можно записать

$$T_{ik}=S_{ik}+A_{ik};\quad (S_{ik}=S_{ki};\quad A_{ik}=-A_{ki}).$$

Но тогда

$$T_{ik}x^i x^k=S_{ik}x^i x^k+A_{ik}x^i x^k=S_{ik}x^i x^k=1.$$

Тензорная поверхность однозначно определяется только симметричной частью тензора.

Эта величина носит название *инварианта вектора*, т. е.

$$A_i A_i = I = \mathrm{inv}.$$

Инварианты можно составить и из компонент тензора любого ранга.

Для получения инвариантов тензора второго ранга в общем виде распишем характеристическое уравнение (3. 7), раскрыв определитель:

$$\lambda^3 - \lambda^2 (T_{11} + T_{22} + T_{23}) +$$

$$+ \lambda \left(\begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} \right) - \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку λ, λ^2, λ^3 являются скалярами и потому не зависят от выбора системы координат, коэффициенты этого уравнения также не должны меняться при изменении системы координат.

Таким образом, величины*:

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} (= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \mathrm{inv};$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix}$$

$$(= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) = \mathrm{inv};$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} (= \lambda_1\lambda_2\lambda_3) = \mathrm{inv}$$

являются *инвариантами* тензора второго ранга.

Используя эти инварианты (I_1 — линейный инвариант, I_2 — квадратичный, I_3 — инвариант 3-го порядка), можно составить бесчисленное множество других инвариантов, представляющих всевозможные комбинации I_1, I_2, I_3.

Например,

$$I_1^2 - 2I_2 = T_{ik} T_{ik};$$

$$I_1^2 = (T_{ii})^2$$

и т. д.

* Выражения I_1, I_2, I_3 через λ_1, λ_2, λ_3 следуют из известной теоремы алгебры — теоремы Виетта.

Исходя из характеристического уравнения (3.7, в), можно получить инварианты тензора второго ранга через его компоненты в обобщенной системе координат. Они имеют вид:

$$I_1 = T_i^{\cdot\, i}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(T_i^{\cdot\, i})^2 - T_i^{\cdot\, k} T_k^{\cdot\, i}\right]$$

$$I_3 = \det \| T_i^{\cdot\, k} \| .$$

Те тензоры, у которых линейный инвариант $I_1 = 0$, называют *девиаторами*.

Любой тензор можно разложить на девиатор и шаровой тензор:

$$T_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{3} T_{ll} \delta_{ik} + \frac{1}{3} T_{ll} \delta_{ik} = D_{ik} + \frac{1}{3} \delta_{ik} T_{ll}.$$

Тензор D_{ik} — девиатор, ибо

$$D_{ll} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = T_{ll} - \frac{1}{3} T_{ll} \cdot 3 = 0.$$

Тензор — девиатор в системах обобщенных координат имеет компоненты вида

$$D_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{3} g_{ik} T_i^{\cdot\, i},$$

$$D^{ik} = T^{ik} - \frac{1}{3} g^{ik} T_i^{\cdot\, i},$$

$$D_i^{\cdot\, k} = T_i^{\cdot\, k} - \frac{1}{3} g_i^{\cdot\, k} T_i^{\cdot\, i}.$$

При этом, как легко видеть, его свертка $D_i^{\cdot\, i} = 0$.

3. 8. Признак тензорности величин

В дополнение к вышеприведенному определению тензора, как величины, преобразующейся по определенному закону, можно дать другое определение тензора. Это определение обычно рассматривается как признак тензорности величин.

Сформулируем признак тензорности для девяти величин, являющийся определением тензора 2-го ранга.

Пусть A_i, B_i — компоненты двух произвольных векторов; если при помощи девяти величин T_{ik} можно образовать инвариант вида

$$T_{ik} A_i B_k = \text{inv}, \qquad (3.10)$$

то девять величин T_{ik} образуют тензор 2-го ранга.

Действительно, в силу инвариантности выражения (3.10) и закона преобразования компонент векторов A_i и B_i при пе-

реходе к другой произвольной системе декартовых координат имеем:

$$T'_{ik}A'_i B'_k = T_{lm}A_l B_m = T_{lm}\alpha_{i'l}\alpha_{k'm}A'_i B'_k$$

или

$$(T'_{ik} - \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}T_{lm})A'_i B'_k = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, имеем:

$$T'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}T_{lm}.$$

Эта формула преобразования величин T_{ik} доказывает их тензорность.

Аналогично формулируется и доказывается признак тензорности, являющийся определением тензора любого ранга.

Кроме того, (в случае системы обобщенных координат), если, например:

$$T_{lk}A^l B^k = \text{inv}, \quad T^{lk}A_l B_k = \text{inv}, \quad T_l^{\cdot k}A^l B_k = \text{inv},$$

где A_l, B_l — ковариантные, а A^l, B^l — контравариантные компоненты двух произвольных векторов, то величины $T_{lk}, T^{lk}, T_l^{\cdot k}$ являются, соответственно, ковариантными, контравариантными и смешанными компонентами тензора 2-го ранга.

3. 9. Псевдотензоры

При рассмотрении векторного произведения мы отмечали некоторую неопределенность в направлении вектора $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$: направление этого вектора устанавливается условно, в зависимости от выбранной системы координат (правая или левая). Было показано (см. задачу 11, гл. 1), что бесконечно малые повороты, а следовательно, и угловая скорость твердого тела являются векторами; однако направление этих векторов выбирается условно.

В то же время направления таких векторов, как скорость, ускорение, сила, не зависят от того, определяются ли они в правой системе или в левой.

В связи с этим закон преобразования компонент первой группы векторов (векторное произведение, угловая скорость) будет отличаться от закона преобразования компонент векторов второй группы (сила, скорость) при таких преобразованиях координат, когда правая система переходит в левую или наоборот (см. § 3.1).

Все линейные ортогональные преобразования координат:

$$x'_i = \alpha_{i'k}x_k + x_i^{0'} \quad \text{(прямое преобразование);}$$

$$x_i = \alpha_{k'i}x'_k + x_i^0 \quad \text{(обратное преобразование)}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{i'l}\alpha_{i'k} &= \delta_{lk} \\ \alpha_{i'l}\alpha_{k'l} &= \delta'_{ik} \end{aligned}\right\} \quad \text{(ортогональность преобразования)}$$

можно классифицировать при помощи значения определителя:

$$\det \| \alpha_{i'k} \| \equiv \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{1'1} & \alpha_{1'2} & \alpha_{1'3} \\ \alpha_{2'1} & \alpha_{2'2} & \alpha_{2'3} \\ \alpha_{3'1} & \alpha_{3'2} & \alpha_{3'3} \end{vmatrix}. \tag{3.11}$$

Этот определитель, составленный из коэффициентов общего ортогонального преобразования координат, имеет только два значения, а именно:

$$\Delta = +1, \quad \Delta = -1.$$

Действительно, используя соотношения (2.5) между косинусами и теорему об умножении определителей*, получим

$$\det \| \delta'_{ik} \| = \det \left\| \sum_{l=1}^{3} \alpha_{i'l}\, \alpha_{k'l} \right\| = \det \| \alpha_{i'l} \| \cdot \det \| \alpha_{k'l} \| = \{ \det \| \alpha_{i'k} \| \}^2 = \Delta^2.$$

Поскольку

$$\det \| \delta'_{ik} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

то имеем:

$$\Delta^2 = 1, \quad \Delta = \pm 1.$$

В связи с этим все линейные ортогональные преобразования координат могут быть разбиты на два класса:

1. Класс преобразования движения (непрерывные преобразования). Непрерывное преобразование (преобразование движения) координатных систем состоит в непрерывном сдвиге и вращении системы (K') из совмещенного с (K) положения в любое другое. При этом исходная система и любая преобразованная система могут быть либо обе левые, либо обе правые. Правую систему нельзя получить непрерывным преобразованием из левой, как и левую из правой. Для этого класса преобразований координат имеем:

$$\Delta = +1.$$

Действительно, тождественное преобразование $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, $x_3 = x'_3$ дает $\Delta = +1$. При непрерывном преобразовании системы (K) в (K') вследствие того, что определитель $\Delta \equiv \det \| \alpha_{i'k} \|$ является непрерывной функцией от косинусов $\alpha_{i'k}$, углов между осями его значение не может меняться скачком от $+1$ к -1.

Примером преобразования движения может служить такое преобразование (см. 3.6):

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -x_1, \quad x'_3 = x_3.$$

---

* Если a_{ik} — элементы одного определителя (третьего порядка) и b_{ik} — другого, то величины определителя c_{ik}, представляющего собой произведение двух первых ($\det \| c_{ik} \| = \det \| a_{ik} \| \cdot \det \| b_{ik} \|$), образуются по одному из следующих правил:

$$c_{ik} = a_{il} b_{kl}; \quad c_{ik} = a_{li} b_{lk}; \quad c_{ik} = a_{li} b_{kl}; \quad c_{ik} = a_{il} b_{lk}$$

(помнить, что $a_{il} b_{kl} \equiv \sum_{l=1}^{3} a_{il} b_{kl}$), см. А. К. Сушкевич. Основы высшей алгебры, § 20, гл. II.

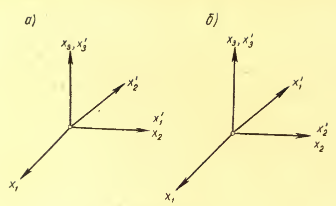


Рис. 3.6. а) Преобразованне вращения $\det\|\alpha_{i'k}\| = +1$,
б) Преобразованне отражения $\det\|\alpha_{i'k}\| = -1$

2. Класс преобразования отраження. Две системы (K) и (K'), осуществляющие преобразованне отраження коордннат, не могут быть совмещены друг с другом непрерывным нх движением; две их одноимеиные осн можно совместнть так, что их положительные направления совпадут, а третьи прн этом окажутся зеркальным отображеннем одна другой. Прн этом если система (K) правая, то (K') — левая, и наоборот.

Для этого класса преобразований координат имеем:

$$\Delta = -1.$$

Примером преобразования отражения может служить такое преобразование (см. рис. 3.6):

$$x_1' = -x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3.$$

В зависимости от закона преобразования компонент по отношенню к этнм двум классам линейных ортогональных преобразований все тензорные величины можно разделить на истинные тензоры, или просто *тензоры*, и *псевдотензоры*.

Псевдотензор — это величина, компоненты которой преобразуются по закону

$$\Pi'_{ikl\ldots} = \alpha_{i'm}\,\alpha_{k'r}\,\alpha_{l's}\ldots \Pi_{mrs\ldots}\,\Delta, \tag{3,12}$$

где $\Delta = \det\|\alpha_{i'k}\|$.

Закон преобразования 3^n чисел, определяющих в каждой системе коордннат псевдотензор n-го ранга, совпадает с законом преобразования компонент истинного тензора ранга только при преобразовании координат, относящихся к классу преобразований движения (непрерывных преобразований). В случае преобразований, переводящих правую систему коордннат в левую, нли наоборот, закон преобразовання отличается знаком.

Для истинного тензора закон преобразования компонент *сохраняется* прн *любых* линейных ортогональных преобразованнях координат и нмеет вид

$$T'_{ikl\ldots} = \alpha_{i'm}\,\alpha_{k'r}\,\alpha_{l's}\ldots T_{mrs\ldots}.$$

Что касается алгебры псевдотензоров, то из законов преобразовання для тензоров н псевдотензоров можно установить следующне положення:

1) сумма двух псевдотензоров одного ранга является псевдотензором того же ранга;

2) произведение двух псевдотензоров является тензором (истинным), ранг которого равен сумме рангов сомножителей;

3) произведение псевдотензора на тензор является псевдотензором;

4) свертывание псевдотензора дает псевдотензор низшего ранга.

Рассмотрим несколько примеров псевдотензоров.

Пример 1. Если определением объема служит интеграл

$$\tau=\iiint dx_1dx_2dx_3,$$

то в другой системе координат, используя теорему о преобразовании переменных в тройном интеграле, получим

$$\tau'=\iiint dx_1'\,dx_2'\,dx_3'=\iiint \frac{\partial(x_1',x_2',x_3')}{\partial(x_1,x_2,x_3)}dx_1dx_2dx_3.$$

Здесь якобиан равен

$$\frac{\partial(x_1',x_2',x_3')}{\partial(x_1,x_2,x_3)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1'}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1'}{\partial x_3}\\ \frac{\partial x_2'}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2'}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2'}{\partial x_3}\\ \frac{\partial x_3'}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3'}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3'}{\partial x_3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_{1'1} & \alpha_{1'2} & \alpha_{1'3}\\ \alpha_{2'1} & \alpha_{2'2} & \alpha_{2'3}\\ \alpha_{3'1} & \alpha_{3'2} & \alpha_{3'3}\end{vmatrix}=\Delta.$$

Он вычисляется на основании (2.3).

Поэтому

$$\tau'=\tau\cdot\Delta.$$

Таким образом, согласно определению, величина τ является псевдотензором нулевого ранга, или *псевдоскаляром*. Его называют иногда относительным инвариантом.

В то же время, если за определение объема взять $|\tau|=\left|\iiint dx_1dx_2dx_3\right|$, то объем будет скаляром, не изменяющим своего значения при любом ортогональном линейном преобразовании декартовых координат. Отрезок прямой $ds^2=\Delta x_i\Delta x_i$ также не меняет своего значения при любом преобразовании координат. Эти величины являются скалярами; их называют иногда абсолютными скалярами, или абсолютными инвариантами.

Пример 2. Рассмотрим компоненты C_i векторного произведения двух векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. В некоторой системе (K) декартовых координат получим

$$C_i=A_kB_l-A_lB_k,$$

причем индексы (i, k, l) образуют четную перестановку чисел (1, 2, 3).

В другой системе декартовых координат (K') имеем

$$A_k'=\alpha_{k'm}A_m,\quad B_l'=\alpha_{l'n}B_n.$$

Поэтому

$$C_i'=\alpha_{k'm}\alpha_{l'n}A_mB_n-\alpha_{l'm}\alpha_{k'n}A_mB_n=(\alpha_{k'm}\alpha_{l'n}-\alpha_{l'm}\alpha_{k'n})\,A_mB_n.$$

Справа стоит сумма по всем значениям индексов m и n, причем при $m=n$ слагаемые равны нулю. Запишем эту сумму в таком виде, чтобы индексы m и n первого члена в скобках, т. е. $\alpha_{k'm}\alpha_{l'n}$ составляли циклическую перестановку, т. е. (12), (23) и (31). Тогда

$$C_i' = (\alpha_{k'm}\alpha_{l'n} - \alpha_{l'm}\alpha_{k'n})(A_m B_n - A_n B_m). \tag{3.13}$$

Здесь индексы (m, n), как и индексы (i, k, l), составляют циклические перестановки чисел 1, 2, 3.

Мы уже получали (см. 3. 4)

$$\alpha_{k'm}\alpha_{l'n} - \alpha_{l'm}\alpha_{k'n} = (i_k' \times i_l')\cdot i_r,$$

где индексы (m, n, r) составляют циклическую перестановку. Но при этом мы можем записать

$$A_m B_n - A_n B_m = C_r. \tag{3.14}$$

Если новая система (K') правая, как и (K), то

$$i_k' \times i_l' = i_i',$$

а если — левая, т. е. преобразование координат является преобразованием отражения, то

$$i_k' \times i_l' = -i_i'$$

при циклической перестановке индексов (i, k, l).

Таким образом, можем записать

$$i_k' \times i_l' = i_i'\Delta,$$

где Δ — определитель (3.11).

Тогда

$$(i_k' \times i_l')\cdot i_r = (i_i'\cdot i_r)\,\Delta = \alpha_{i'r}\,\Delta.$$

Поэтому, учитывая (3.14), формулу (3.13) можно записать в виде

$$C_i' = \alpha_{i'r}\,C_r\Delta.$$

Таким образом, векторное произведение двух векторов представляет собой псевдовектор.

Единичный псевдотензор. Единичный тензор δ_{ik} имеет во всех декартовых системах координат одни и те же компоненты (нуль и единица).

Существует единичный псевдотензор ε_{ikl} антисимметричный по любой паре из его индексов, который не меняет своих компонент при преобразовании движения, а при преобразовании отражения те компоненты его, которые равны единице, меняют знак.

Двадцать семь компонент тензора ε_{ikl} определяются как всевозможные смешанные произведения ортов координатных осей.

В системе (K) с ортами i_1, i_2, i_3 его компоненты равны

$$\varepsilon_{ikl} = (i_i \times i_k)\cdot i_l. \tag{3.15}$$

Как следует из определения,

$$\varepsilon_{ikl} = \begin{cases} +1, & \text{если } i, k, l \text{ составляют циклическую перестановку;} \\ -1, & \text{если } i, k, l \text{ составляют нециклическую перестановку;} \\ 0, & \text{во всех остальных случаях, т. е. если среди } i, k, l \\ & \text{есть одинаковые числа.} \end{cases}$$

Таким образом, отличные от нуля компоненты единичного псевдотензора равны:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1.$$

Покажем, что величины ε_{ikl} образуют псевдотензор. В системе (K') имеем:

$$\varepsilon'_{ikl} = (i'_i \times i'_k)\cdot i'_l. \tag{3.16}$$

Раскладывая орты системы (K') по ортам старой системы (K) и подставляя это разложение в (3.16), получим

$$\varepsilon'_{ikl} = \alpha_{i'm}\,\alpha_{k'n}\,\alpha_{l'r}\,(i_m \times i_n)\cdot i_r.$$

Если система (K), как и (K') правая, (преобразование координат относится к преобразованиям движения), то

$$(i_m \times i_n)\cdot i_r = \varepsilon_{mnr}.$$

Если система (K) — левая, а (K') — правая (преобразование координат относится к группе отражения), то

$$(i_m \times i_n)\cdot i_r = -\varepsilon_{mnr}$$

(индексы m, n, r составляют циклическую перестановку).

Таким образом, можем записать

$$(i_m \times i_n)\cdot i_n = \varepsilon_{mnr}\Delta,$$

где Δ — определитель (3.11).

Следовательно,

$$\varepsilon'_{ikl} = \alpha_{i'm}\;\alpha_{k'n}\;\alpha_{l'r}\;\varepsilon_{mnr}\Delta.$$

Это доказывает, что 27 величин ε_{ikl} образуют псевдотензор третьего ранга.

Образование псевдотензоров различных рангов. При помощи единичного псевдотензора можно образовывать псевдотензоры различных рангов. Если T_{ikl} — истинный тензор 3-го ранга, то величина

$$\Pi = \varepsilon_{ikl} T_{ikl}$$

является псевдоскаляром. В этом можно убедиться, рассматривая закон преобразования величины П.

Если T_{ik} — истинный тензор 2-го ранга, то величины

$$\Pi_i = \varepsilon_{ikl} T_{kl}$$

образуют псевдовектор. При этом, если $T_{kl} = A_k B_l$, то величины

$$\Pi_i = \varepsilon_{ikl} A_k B_l$$

являются компонентами векторного произведения $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$.

Действительно, имеем:

$$\Pi_1 = \varepsilon_{1kl} A_k B_l = \varepsilon_{123} A_2 B_3 + \varepsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2 \text{ и т. д.}$$

Если φ — истинный скаляр, то величины

$$\Pi_{ikl} = \varepsilon_{ikl}\varphi$$

образуют псевдотензор 3-го ранга.

Аналогично при помощи тензорного умножения ε_{ikl} на истинные тензоры различных рангов можно образовать псевдотензоры всевозможных рангов.

Задачи и упражнения

Задача 1. Выразить скалярное произведение тензоров (диссипативную функцию в гидромеханике)

$$D = \widehat{p}_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k},$$

где

$$\widehat{p}_{ik} = 2\mu V_{ik}^0 + \zeta \delta_{ik} V_{ll};$$

$$V_{ik}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{3}\delta_{ik} V_{ll}; \quad V_{ll} = \frac{\partial V_l}{\partial x_l},$$

через компоненты тензора V_{ik}^0 и через V_{ll}.

Решение. Заметим прежде всего, что тензор V_{ik} — девиатор, ибо $V_{ll}^0 = 0$.

Имеем

$$D = \widehat{p}_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\widehat{p}_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \widehat{p}_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\widehat{p}_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \widehat{p}_{ki} \frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right).$$

Так как $\widehat{p}_{ik} = \widehat{p}_{ki}$, то

$$D = \widehat{p}_{ik} V_{ik},$$

где

$$V_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right) = V_{ik}^0 + \frac{1}{3}\delta_{ik} V_{ll}.$$

Тогда имеем далее:

$$D = \widehat{p}_{ik} V_{ik} = \widehat{p}_{ik} V_{ik}^0 + \widehat{p}_{ik} \frac{1}{3}\delta_{ik} V_{ll} =$$

$$= 2\mu V_{ik}^0 V_{ik}^0 + \zeta \delta_{ik} V_{ll} V_{ik}^0 + \frac{1}{3}\widehat{p}_{ll} V_{ll}.$$

Но

$$\delta_{ik} V_{ik}^0 = V_{ll}^0 = 0;$$

$$\widehat{p}_{ll} = 2\mu V_{ll}^0 + \zeta \delta_{ll} V_{ll} = 3\zeta V_{ll}.$$

Поэтому окончательно имеем:

$$D = 2\mu V_{ik}^0 V_{ik}^0 + \zeta V_{ll} V_{ll} = 2\mu (V_{ik}^0)^2 + \zeta (V_{ll})^2.$$

В случае несжимаемой жидкости $(V_{ll} = 0)$ получим

$$D = 2\mu V_{ik} V_{ik} = 2\mu (V_{ik})^2.$$

Задача 2. Выразить свободную энергию упругого тела

$$F=\frac{1}{2}\,p_{ik}u_{ik}$$

через компоненты тензора u_{ik}^0 и через $u_{ll}=\frac{\partial u_l}{\partial x_l}$, если

$$p_{ik}=2\lambda u_{ik}^0+Ku_{ll}\delta_{ik},$$

где

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right);$$

$$u_{ik}^0=u_{ik}-\frac{1}{3}\,\delta_{ik}u_{ll}.$$

Ответ.

$$F=\lambda u_{ik}^0u_{ik}^0+\frac{K}{2}\,u_{ll}u_{ll}.$$

Задача 3. Показать, что ось симметрии системы материальных точек является главной осью тензора моментов инерции для каждой точки этой оси.

Решение. Пусть ось (x_1) является осью симметрии системы. Возьмем из этой оси любую точку O и проведем две оси (x_2) и (x_3) так, чтобы (x_1), (x_2), (x_3) составляли систему (K) прямоугольных декартовых координат. Покажем, что ось (x_1) системы (K) является главной осью для тензора I_{ik}.

Если (x_1) является осью симметрии системы, то это значит, что для каждой точки с массой m_l и координатами $x_1^{(l)}$, $x_2^{(l)}$, $x_3^{(l)}$ в системе найдется точка с той же массой $m_j=m_l$, координаты которой будут $x_1^{(j)}=x_1^{(l)}$; $x_2^{(j)}=-x_2^{(l)}$; $x_3^{(j)}=-x_3^{(l)}$. Тогда имеем:

$$I_{12}=-\sum_{n=1}^{N}m_nx_1^{(n)}x_2^{(n)}=\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}}m_lx_1^{(l)}x_2^{(l)}-\sum_{j=\frac{N}{2}+1}^{N}m_jx_1^{(j)}x_2^{(j)}.$$

Здесь мы всю сумму разбили на две суммы по точкам, симметричным относительно оси (x_1). В силу вышесказанного эти суммы равны по величине и обратны по знаку. Поэтому $I_{12}=0$. Аналогично получим: $I_{13}=0$.

Таким образом, в нашей системе (K) тензор I_{ik} имеет матрицу

$$\|I_{ik}\|=\begin{Vmatrix} I_{11} & 0 & 0\\ 0 & I_{22} & I_{23}\\ 0 & I_{32} & I_{33}\end{Vmatrix},$$

что указывает на то, что ось (x_1) системы (K) является главной осью тензора I_{ik}.

Задача 4. Показать, что любая ось, перпендикулярная к плоскости симметрии системы, является главной осью тензора для точки пересечения этой оси с плоскостью симметрии.

Решение. Пусть ось (x_1) пересекает в точке O плоскость симметрии тела. Выберем начало системы прямоугольных декартовых координат (K) в этой точке. Поскольку плоскость (x_2, x_3) является плоскостью симметрии системы, то для каждой точки с массой m_i и координатами $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, $x_3^{(i)}$ найдется точка с массой $m_j = m_i$ и координатами

$$x_1^{(j)} = -x_1^{(i)}, \quad x_2^{(j)} = x_2^{(i)}, \quad x_3^{(j)} = x_3^{(i)}.$$

Тогда

$$I_{12} = -\sum_{n=1}^{N} m_n x_1^{(n)} x_2^{(n)} = -\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} m_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} - \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^{N} m_j x_1^{(j)} x_2^{(j)} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} m_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} m_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} = 0.$$

Аналогично покажем, что $I_{13} = 0$.

Таким образом, в этой системе имеем

$$\|I_{ik}\| = \begin{Vmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{32} & I_{33} \end{Vmatrix}.$$

Если теперь систему (K) повернуть вокруг оси (x_1) на угол (см. 3.6)

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2I_{23}}{I_{22} - I_{33}},$$

то в новой системе (K'), ось (x_1') которой совпадает с (x_1), получим

$$\|I'_{ik}\| = \begin{Vmatrix} I'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{33} \end{Vmatrix},$$

т. е. система (K') является главной.

Задача 5. Пусть система (K) есть система главных осей тензора моментов инерции, причем начало этой системы совпадает с центром масс.

Показать, что для любой точки этих осей главные оси совпадают с (K).

Решение. Так как начало системы (K) совпадает с центром масс, то

$$\sum_{n=1}^{N} m_n x_1^{(n)} = \sum_{n=1}^{N} m_n x_2^{(n)} = \sum_{n=1}^{N} m_n x_3^{(n)} = 0, \qquad (*)$$

Поскольку оси системы (K) главные, то

$$I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0. \qquad (**)$$

Рассмотрим систему (K') с началом в точке $(x_1 = a,\ x_2 = x_3 = 0)$, оси которой параллельны осям (K). Тогда в системе (K') имеем:

$$I'_{ik} = -\sum_{n=1}^{N} m_n x_i^{(n)'} \quad x_k^{(n)'} \qquad (i \neq k).$$

Но

$$x_1^{(n)'} = x_1^{(n)} - a;$$

$$x_2^{(n)'} = x_2^{(n)};$$

$$x_3^{(n)'} = x_3^{(n)}.$$

Подставляя эти выражения в I'_{ik} и учитывая $(*)$ и $(**)$, получим $I'_{ik} = 0$ $(i \neq k)$, т. е. оси системы (K') являются главными.

Аналогично показывается, что сдвиг начала системы по направлению других осей системы (K) приводит к тому же результату.

Задача 6. Исходя из геометрического образа, связанного с понятием симметричного тензора 2-го ранга T_{ik} — поверхности

$$T_{ik} x_i x_k = 1,$$

дать геометрическое истолкование инвариантов тензора I_1, I_2, I_3 (см. 3.7).

Решение. Пусть a, b, c — главные полуоси эллипсоида

$$T_{ik} x_i x_k = 1,$$

повернутого произвольным образом относительно осей системы $(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

1. Находим величину полуосей эллипсоида $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ в направлении осей (x_1), (x_2) и (x_3).

При $x_2 = x_3 = 0$ имеем $x_1 = \bar{a}$ и $T_{11}\bar{a}^2 = 1$.

Отсюда $\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{T_{11}}}$. Аналогично

$$\bar{b} = \frac{1}{\sqrt{T_{22}}}; \quad \bar{c} = \frac{1}{\sqrt{T_{33}}}.$$

Следовательно,

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \frac{1}{\bar{a}^2} + \frac{1}{\bar{b}^2} + \frac{1}{\bar{c}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \text{inv}.$$

Итак, *сумма обратных квадратов трех взаимно перпендикулярных полуосей эллипсоида не зависит от положения образуемого ими триэдра и равна первому инварианту тензора, определяющего поверхность эллипсоида.*

2. Уравнение эллиптического сечения $x_3 = 0$ эллипсоида имеет вид

$$T_{11}x_1^2 + 2T_{12}x_1x_2 + T_{22}x_2^2 = 1.$$

Главные полуоси этого эллипса равны $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ и $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$, где λ_1 и λ_2 — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

так что

$$\lambda_1\lambda_2 = T_{11}T_{22} - T_{12}^2.$$

Площадь этого сечения равна

$$F_3 = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}.$$

Обозначим величины площадей остальных сечений ($x_1 = 0$ и $x_2 = 0$) через F_1 и F_2. Вычисляя их, получим выражение инварианта I_2 через F_1, F_2, F_3:

$$I_2 = \lambda_3\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 = \pi^2\left(\frac{1}{F_1^2} + \frac{1}{F_2^2} + \frac{1}{F_3^2}\right) = \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{b^2c^2}.$$

Итак, *сумма обратных квадратов площадей эллипсов, образованных тремя взаимно перпендикулярными плоскостями, пересекающимися в центре, не зависит от их положения и определяется величиной второго инварианта тензора.*

3. Объем тензорного эллипсоида равен

$$V = \frac{4\pi}{3} abc.$$

Определитель I_3 в главных осях имеет вид

$$I_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2b^2c^2}.$$

Отсюда

$$I_3 = \frac{16\pi^2}{9V^2}.$$

Итак, *третий инвариант тензора определяется величиной объема тензорного эллипсоида, которая одинакова в различных системах координат.*

Задача 7. Найти разложение симметричного тензора 2-го ранга $T_{ik} = T_{ki}$ по ортам собственных (главных) его направлений.

Решение. Пусть a_1, a_2, a_3 — орты главных направлений тензора, ковариантные компоненты которого равны T_{ik}.

Тогда по определению главных направлений из (3.7, в) имеем 9 тождеств (α, $i = 1, 2, 3$)

$$(T_{ik} - \lambda_{(\alpha)} g_{ik})\, a^k_{(\alpha)} = 0,$$

где $\lambda^{(\alpha)}$ — собственное число, соответствующее вектору $a_{(\alpha)}$.

Умножая каждую группу уравнений на $a_{(\alpha)l}$ и суммируя по α, получим

$$T_{ik} \sum_{\alpha=1}^{3} a^k_{(\alpha)} a_{(\alpha)\,l} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_{(\alpha)}\, g_{ik} a^k_{(\alpha)} a_{(\alpha)\,l}.$$

Учитывая (2.45), получим окончательно

$$T_{lk} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_{(\alpha)}\, a_{(\alpha)\,k}\, a_{(\alpha)l};$$

что и представляет собой искомое разложение.

Упражнения

1. Образовать скаляры путем свертывания тензоров, матрицы которых имеют вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{Vmatrix}.$$

2. Найти вектор, образованный умножением тензора T_{ik} на вектор A_i с последующим свертыванием по индексу вектора и: 1) первому индексу тензора, 2) второму индексу тензора, если

$$\| T_{ik} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{Vmatrix}; \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}_1 + 2\boldsymbol{i}_2 + 3\boldsymbol{i}_3.$$

3. Найти скаляр, образованный умножением тензора T_{ik} на векторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ с последующим свертыванием по индексу вектора $\boldsymbol{A}$ и первому индексу тензора и по индексу $\boldsymbol{B}$ и второму индексу тензора, если T_{ik} и $\boldsymbol{A}$ заданы условием предыдущей задачи, а $\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{i}_1 + 5\boldsymbol{i}_2 + 6\boldsymbol{i}_3$.

4. Дано:

$$\| T_{ik} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}; \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}_1 + 2\boldsymbol{i}_2 + 3\boldsymbol{i}_3.$$

Разложить тензор T_{ik} на симметричный S_{ik} и антисимметричный $K_{ik} = -K_{ki}$.

Найти:

1) $T_{ik}A_k$; $T_{ik}A_i$; $T_{ik}A_iA_k$;
2) $K_{ik}T_{ik}$; $K_{ik}S_{ik}$; $K_{ik}A_i$; $K_{ik}A_iA_k$;
3) $T_{ik}\delta_{ik}$; $K_{ik}\delta_{ik}$; $S_{ik}\delta_{ik}$;
4) $T_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}T_{ll}$; $\left(T_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}T_{ll}\right)A_i$; $\left(T_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}T_{ll}\right)A_iA_k$;
5) показать, что если S_{ik} — симметричный тензор, а K_{ik} — антисимметричный, то $S_{ik}K_{ik} = 0$.

5. Найти инварианты тензора упражнений 1 и 4.

6. Найти главные значения и главные направления тензоров.

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

7. Показать, что если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — главные значения симметричного тензора T_{ik}, то

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = g^{kl} T_{kl}; \quad \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 = T^{kl} T_{kl}; \quad \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^3 = T^{kl} T_{lm} T^{m}_{\cdot k}.$$

8. Показать, что если $A^{l}{}_{\cdot kl}a^k b^l c_l$ — скаляр при произвольных векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, то $A^{l}{}_{\cdot kl}$ являются компонентами тензора 3-го ранга.

9. Показать, что если скаляр $A_{ikl}dx^i dx^k dx^l = 0$ при произвольных дифференциалах, то

$$A_{123} + A_{231} + A_{312} + A_{132} + A_{321} + A_{213} = 0.$$

Глава четвертая

ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Физические свойства, имеющие тензорный характер, могут меняться как с течением времени, так и от точки к точке в некоторой части пространства.

Это приводит к рассмотрению тензор-функций скалярного аргумента и радиуса-вектора точки:

$$T_{ik} = T_{ik}(\mathbf{r},\ t).$$

Рассмотрение дифференциальных и интегральных операций над тензор-функциями составляет предмет тензорного анализа.

4.1. Тензорное поле. Циркуляция

Тензор-функции скалярного аргумента. Если каждому допустимому численному значению скалярной величины t соответствует одно вполне определенное значение тензорной величины T_{ik}, то говорят, что задана тензор-функция от скалярного аргумента t:

$$T_{ik} = T_{ik}(t).$$

Частным видом тензор-функции является вектор-функция скалярного аргумента, рассмотренная ранее.

В некоторых случаях приходится рассматривать тензоры второго и более высоких рангов как функции скалярного аргумента.

Если напряженное состояние среды меняется с течением времени, то в каждой точке надо рассматривать девять функций времени $p_{ik} = p_{ik}(t)$, которые для каждого значения t образуют тензор. По определению, производной по t от тензора с компонентами p_{ik} называется тензор, компоненты которого (в неизменяемой с течением t системе координат) вычисляются как пределы:

$$\frac{dp_{ik}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ik}(t + \Delta t) - p_{ik}(t)}{\Delta t}. \qquad (4.1)$$

Правила дифференцирования тензоров более высокого ранга, чем векторы, по существу ничем не отличаются от правил, приведенных для векторов. Они всегда могут быть установлены из определения тензора, его алгебраических свойств и производной по скалярному аргументу.

Дифференцирование тензора по скалярному аргументу не меняет его ранг.

Тензорное поле. Если каждой точке пространства или его части (области) однозначно сопоставлен некоторый тензор, то говорят, что задано поле этого тензора (или *тензорное поле*).

Частные виды тензорных полей — скалярное или векторное, когда характеристикой поля является скалярная или соответственно векторная однозначная функция точки: $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r})$ или $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$.

В атмосфере мы имеем дело со скалярными полями давления $p = p(\boldsymbol{r})$, температуры $T = T(\boldsymbol{r})$, плотности $\rho = \rho(\boldsymbol{r})$.

Движение воздуха или жидкости приходится характеризовать векторными полями скорости $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$, ускорения $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{r})$. При изучении напряженного состояния среды необходимо рассматривать тензорное поле напряжений $p_{ik} = p_{ik}(\boldsymbol{r})$.

Любое тензорное поле характеризуется однозначной функцией точки, функцией радиуса-вектора точки $\boldsymbol{r}$.

Тензорные поля, которые меняются с течением времени, называются *нестационарными* (неустановившимися). Их характеристиками служат тензоры, являющиеся функциями точки и времени:

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{r},\ t);\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},\ t);\ p_{ik} = p_{ik}(\boldsymbol{r},\ t) \text{ и т. п.}$$

Если тензор, характеризующий поле, имеет одинаковое значение для всех точек, то говорят об однородном поле:

$$\varphi = \varphi(t); \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t); \quad p_{ik} = p_{ik}(t) \text{ и т. п.}$$

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать лишь *непрерывные тензорные поля* $T_{ikl\ldots} = T_{ikl\ldots}(\boldsymbol{r})$. Это значит, что разности

$$T_{ikl\ldots}(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}) - T_{ikl\ldots}(\boldsymbol{r})$$

по абсолютной величине могут быть сделаны как угодно малыми при достаточно малом $|\Delta\boldsymbol{r}|$.

Тензорный анализ является наиболее важной частью тензорного исчисления, ибо именно тензорные поля, а не отдельные тензоры, важны в приложениях. Тем не менее, конечно, все операции тензорной алгебры справедливы и для тензоров, образующих поля, если считать, что алгебраиче-

ские операции производятся над тензорами поля в *каждой точке пространства.*

Например, сложение тензоров двух полей одинакового ранга и размерности в каждой точке пространства приводит к построению нового тензорного поля того же ранга, являющегося суммой двух полей слагаемых тензоров. Аналогично производятся над тензорами полей в каждой точке пространства и другие алгебраические операции (например, умножение, свертывание и т. д.), которые приводят к новым полям.

Циркуляция векторного поля. В векторном поле $\boldsymbol{A}$ возьмем некоторую кривую M_1M_2 (рис. 4.1) и разобьем ее с помощью точек $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_n$ на малые участки

$$\Delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}.$$

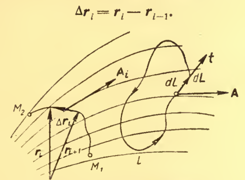


Рис. 4.1. Криволинейный интеграл и циркуляция векторного поля

Составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i,$$

где $\boldsymbol{A}_i$ — значение вектора поля в какой-то точке участка $\Delta \boldsymbol{r}_i$.

Предел этой суммы, если он существует при неограниченном возрастании числа элементов $\Delta \boldsymbol{r}_i$ и убывании до нуля длины всех элементов называется криволинейным интегралом вдоль M_1M_2 и обозначается

$$\lim_{\substack{|\Delta \boldsymbol{r}_i| \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i = \int_{M_1M_2} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{M_1M_2} A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3.$$

Здесь вектор $d\boldsymbol{r}$ направлен в каждой точке кривой M_1M_2 по касательной, а его модуль равен дифференциалу дуги кривой:

$$|d\boldsymbol{r}| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = dL.$$

Особый интерес представляют криволинейные интегралы, которые берутся по замкнутому контуру (например, L на рис. 4.1).

$$\Gamma = \oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}. \qquad (4.2)$$

Здесь $d\mathbf{L}$ — направленный элемент контура, т. е. $d\mathbf{L} = \mathbf{t} dL$ ($\mathbf{t}$ — орт касательной, dL — дифференциал дуги контура).

Интеграл (4.2) называется ***циркуляцией*** вектора A по контуру (L).

Если вектор $\mathbf{A}$ представляет силу, то циркуляция этого вектора по любому замкнутому пути дает работу силы при перемещении материальной частицы по этому замкнутому пути.

Понятие циркуляции вектора тесно связано с понятием так называемого вихря вектора (или ротора вектора) — это будет показано ниже.

4.2. Теорема Остроградского и теорема Стокса

В этом параграфе мы рассмотрим две основные теоремы математического анализа, устанавливающие связь между интегралом по некоторой области и интегралом по границе этой области.

Теорема Остроградского дает выражение интеграла по объему через интеграл по поверхности, ограничивающей этот объем. Теорема Стокса связывает интеграл по поверхности с криволинейным интегралом по контуру, который служит границей этой поверхности.

Векторная формулировка этих теорем, на которой мы остановимся позже (см. 4.4), делает их особенно наглядными, и в таком виде они широко используются при изучении скалярных и векторных полей.

Мы рассмотрим также ряд формул (см. 4.9), примыкающих к теоремам Остроградского и Стокса и представляющих интерес при изучении полей скаляров, векторов и тензоров 2-го ранга.

Теорема Остроградского. Если функции $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(x_1, x_2, x_3)$, $R(x_1, x_2, x_3)$ и $\frac{\partial P}{\partial x_1}$, $\frac{\partial Q}{\partial x_2}$, $\frac{\partial R}{\partial x_3}$ *непрерывны вну-*

три объема τ *и на замкнутой поверхности* S, *ограничивающей* τ, *то*

$$\iiint\limits_{\tau} \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \right) d\tau =$$
$$= \iint\limits_{S} [P \cos(\boldsymbol{n}, x_1) + Q \cos(\boldsymbol{n}, x_2) + R \cos(\boldsymbol{n}, x_3)]\, dS, \quad (4.3)$$

где $\boldsymbol{n}$ *— орт нормали, внешней* к τ (рис. 4.2).

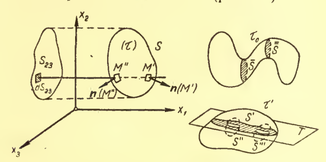


Рис. 4.2. К теореме Остроградского

Теорема Остроградского справедлива для областей, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями любой формы. Область может содержать «поры» (см. τ')

Для доказательства справедливости формулы (4.3) достаточно доказать, например, что

$$\iiint\limits_{\tau} \frac{\partial P}{\partial x_1}\, d\tau = \iint\limits_{S} P \cos(\boldsymbol{n}, x_1)\, dS.$$

Доказательство. Пусть любая прямая, параллельная оси x_1, встречает поверхность S не более, чем в двух точках* M' и M'' (рис. 4.2), в которых определены орты внешней нормали $\boldsymbol{n}(M')$ и $\boldsymbol{n}(M'')$. Тогда, если S_{23} — проекция поверхности S на плоскость $(x_2 x_3)$, получим для точек M' и M'', лежащих на такой прямой

$$\iiint\limits_{\tau} \frac{\partial P}{\partial x_1}\, d\tau = \iint\limits_{S_{23}} \left(\int \frac{\partial P}{\partial x_1}\, dx_1 \right) dS_{23} =$$
$$= \iint\limits_{S_{23}} [P(M') - P(M'')]\, dS_{23}.$$

---

* Это ограничение несущественно и от него легко можно освободиться (см. замечание 3).

Но элемент dS_{23} проекции можно выразить через элементы поверхности S у точек M' и M'':

$$dS_{23} = dS(M') \cdot \cos[n(M'), x_1] = -dS(M'') \cdot \cos[n(M''), x_1].$$

Поэтому

$$\iiint\limits_{\tau} \frac{\partial P}{\partial x_1} d\tau = \iint\limits_{S} P(M)\, dS(M) \cdot \cos[n(M), x_1],$$

где точка M — текущая точка на поверхности S.

Аналогично устанавливаются формулы:

$$\iiint\limits_{\tau} \frac{\partial Q}{\partial x_2} d\tau = \iint\limits_{S} Q dS \cdot \cos(n, x_2);$$

$$\iiint\limits_{\tau} \frac{\partial R}{\partial x_3} d\tau = \iint\limits_{S} R dS \cdot \cos(n, x_3).$$

Теорема Остроградского доказана.

Замечания к теореме Остроградского. 1. Поверхность S, ограничивающая объем τ, предполагается гладкой, т. е. обладающей нормалью, которая непрерывно меняет свое направление от точки к точке.

Теорема применима и в случае, если S — кусочно-гладкая, т. е. склеена из конечного числа гладких кусков (например, поверхность призмы, пирамиды, цилиндра с донышками и т. п.). В этом случае теорему можно применить к каждой части объема τ, ограниченной гладкой поверхностью, и полученные результаты сложить* . Аналитически каждый гладкий кусок кусочно-непрерывной поверхности при подходящем выборе системы координат можно задать уравнением $x_3 = f(x_1, x_2)$, где f — функция с непрерывными частными производными 1-го порядка.

2. Поверхность S предполагается двусторонней, т. е. можно определить положительное направление ее нормали так, что орт n, идущий в этом направлении, указывает все время одну и ту же сторону поверхности.

3. Ограничение, состоящее в том, что прямые, параллельные координатным осям, пересекают S не более, чем в двух точках, несущественно.

Действительно, если весь объем τ не удовлетворяет этому условию (например, τ_0 на рис. 4.2), то его всегда можно разбить на конечное число объемов, удовлетворяющих этому условию. Тогда, применяя формулу Остроградского к каждому из таких объемов и складывая результаты, получим слева интеграл по всему объему τ_0, а справа — интеграл только по поверхности S_0 — ограничивающей этот объем, ибо интегралы по смежным для составляющих объемов поверхностям ($\bar{S}$, $\bar{\bar{S}}$ на рис. 4.2) взаимно уничтожаются, так как они вычисляются дважды, но с прямо противоположным направлением нормали.

4. Теорема справедлива также и для объемов с «порами», т. е. в случае объема (например, τ' на рис. 4.2), ограниченного несколькими замкнутыми поверхностями (S', S'', S'''). Справедливость теоремы нетрудно установить, проведя внутри τ' поверхность, рассекающую объем τ' по «порам» (например, плоскость T на рис. 4.2) и применяя формулу Остроградского к соседним объемам, которые уже не содержат «пор».

---

* См. Замечание 3.

Пусть векторное поле $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ в системе координат (x_1, x_2, x_3) имеет компоненты:

$$A_1 = P(x_1, x_2, x_3);$$
$$A_2 = Q(x_1, x_2, x_3);$$
$$A_3 = R(x_1, x_2, x_3).$$

Тогда формула Остроградского примет вид

$$\iiint\limits_{\tau}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right) d\tau =$$
$$= \iint\limits_{S}\{A_1 \cos(\boldsymbol{n}, x_1) + A_2 \cos(\boldsymbol{n}, x_2) + A_3 \cos(\boldsymbol{n}, x_3)\} \, dS.$$

Если учесть, что компоненты орта внешней нормали $\boldsymbol{n}$ суть: $n_1 = \cos(\boldsymbol{n}, x_1)$; $n_2 = \cos(\boldsymbol{n}, x_2)$; $n_3 = \cos(\boldsymbol{n}, x_3)$, то формулу можно записать в виде

$$\iiint\limits_{\tau}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right) d\tau = \iint\limits_{S} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS. \qquad (4.3,a)$$

Выражение, стоящее в объемном интеграле, также имеет векторную интерпретацию, на которой мы остановимся ниже (см. § 4.4).

Теорема Стокса. *Если функции* $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(x_1, x_2, x_3)$, $R(x_1, x_2, x_3)$ *и* $\frac{\partial P}{\partial x_2}$, $\frac{\partial P}{\partial x_3}$, $\frac{\partial Q}{\partial x_1}$, $\frac{\partial Q}{\partial x_3}$, $\frac{\partial R}{\partial x_1}$, $\frac{\partial R}{\partial x_2}$ *непрерывны на поверхности S в замкнутом контуре L, который является границей S, то*

$$\iint\limits_{S}\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)\cos(\boldsymbol{n}, x_1) + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1}\right)\cos(\boldsymbol{n}, x_2) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right)\cos(\boldsymbol{n}, x_3)\right\} dS = \oint\limits_{L} P dx_1 + Q dx_2 + R dx_3, \qquad (4.4)$$

где $\boldsymbol{n}$ — орт нормали к поверхности S (рис. 4.3).

При этом важно условиться относительно направления обхода контура L и положительного направления нормали $\boldsymbol{n}$.

Поверхность S предполагается двухсторонней, а положительное направление нормали $\boldsymbol{n}$ на ней связано с положительным направлением обхода ее границы — контура L. Положительный обход контура L выбирается так, чтобы поверхность оставалась всегда *слева* для наблюдателя, обходящего контур так, что положительный орт $\boldsymbol{n}$ в точках у контура L направлен от ног к голове наблюдателя. В любой точке поверхности, таким образом, положительное направление нормали $\boldsymbol{n}$ с положительным обходом элементарного контура у этой точки составляет правый винт (рис. 4.3).

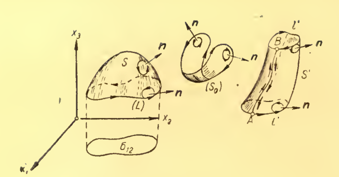


Рис. 4.3. К теореме Стокса

Теорема Стокса справедлива для кусочно-гладких поверхностей, ограниченных либо одним контуром (см. поверхность S), либо несколькими контурами (см. поверхность S'). Положительное направление нормали выбирается в любой точке поверхности так, чтобы с направлением положительного обхода элементарного контура у этой точки составлять правый винт

Прежде чем переходить к доказательству теоремы Стокса, рассмотрим случай, когда поверхностью S является плоская область (σ). Покажем, что в этом случае имеет место формула

$$\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)d\sigma=\oint\limits_{l} P dx_1+Q dx_2. \qquad (4.4, a)$$

Эта формула имеет самостоятельное значение и выражает *теорему Грина*.

Здесь $P(x_1, x_2,)$, $Q(x_1, x_2)$, $\frac{\partial Q}{\partial x_1}$, $\frac{\partial P}{\partial x_2}$ — непрерывные функции, а (l) — замкнутый контур, являющийся границей плоской области (σ) (рис. 4.4).

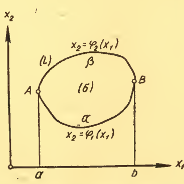


Рис. 4.4. К теореме Грина

Предположим сначала, что контур (l) пересекается прямыми, параллельными (x_2) только в двух точках. Тогда в предположениях теоремы, как известно из анализа, двойной интеграл может быть представлен в виде

$$\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial P}{\partial x_2}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma}\frac{\partial P}{\partial x_2}\,dx_1dx_2=\int\limits_a^b dx_1\int\limits_{x_2=\varphi_1(x_1)}^{x_2=\varphi_2(x_1)}\frac{\partial P}{\partial x_2}\,dx_2=$$

$$= \int_a^b [P(x_1, \varphi_2(x_1)) - P(x_1, \varphi_1(x_1))]\, dx_1.$$

Но каждый интеграл в правой части представляет собой криволинейный интеграл функции $P(x_1, x_2)$ по кривым $A\alpha B$ и $A\beta B$. Поэтому можно записать

$$\iint_\sigma \frac{\partial P}{\partial x_2}\, d\sigma = \int_{A\beta B} P(x_1, x_2)\, dx_1 - \int_{A\alpha B} P(x_1, x_2)\, dx_1.$$

Меняя в первом интеграле направление интегрирования, получим

$$\iint_\sigma \frac{\partial P}{\partial x_2}\, d\sigma = -\int_{B\beta A} P(x_1, x_2)\, dx_1 - \int_{A\alpha B} P(x_1, x_2)\, dx_1 =$$

$$= -\oint_l P(x_1, x_2)\, dx_1, \qquad (*)$$

где справа стоит криволинейный интеграл по замкнутому контуру l, который обходится против часовой стрелки.

Аналогично предполагая, что прямые, параллельные оси (x_1), пересекают контур l только в двух точках, установим формулу

$$\iint_\sigma \frac{\partial Q}{\partial x_1}\, d\sigma = \oint_l Q\, dx_2. \qquad (**)$$

Вычитая из (**) уравнение (*), получим формулу Грина (4.4, a).

Переходим к доказательству теоремы Стокса.

Предположим, что прямые, параллельные оси x_3 пересекают поверхность S только в одной точке (рис. 4.3). Проекция поверхности S на плоскость (x_1, x_2) даст плоскую область σ_{12}, а проекция контура L даст границу области σ_{12} — замкнутый контур l. За положительный обход контура l принимают направление обхода против часовой стрелки, так что с положительным направлением оси x_3 этот обход составляет систему правого винта. Соответственно устанавливается обход контура L, а положительное направление внешней нормали на поверхности S таково, что ее орт $\boldsymbol{n}$ составляет с осью (x_3) острый угол. Тогда

$$d\sigma_{12} = dS \cdot \cos(\boldsymbol{n}, x_3);$$

$$\cos(\boldsymbol{n}, x_3) > 0.$$

Преобразуем интеграл

$$\oint_L P(x_1, x_2, x_3)\, dx_1,$$

используя тот факт, что контур L принадлежит поверхности S, уравнение которой может быть записано в виде $x_3 = f(x_1, x_2)$. Поэтому, если заменить под знаком интеграла x_3 на $f(x_1, x_2)$, то подынтегральная функция $P[x_1, x_2, f(x_1 x_2)]$ будет содержать только переменные x_1 и x_2, которые для переменной точки на контуре L имеют то же значение, что и в соответствующей точке на контуре l. Поэтому интегрирование по L можно заменить на интегрирование по l, т. е.

$$\oint_L P(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 \equiv \oint_l P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]\, dx_1.$$

Применяя к этому интегралу формулу Грина (4.4, a) и учитывая, что x_2 входит в выражение для P как непосредственно, так и через посредство $x_3 = f(x_1, x_2)$, найдем:

$$\oint_{(l)} P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]\, dx_1 =$$

$$= -\iint_{\sigma_{12}} \left[\frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial x_2} + \frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] d\sigma_{12}.$$

Выражая элемент $d\sigma_{12}$ через dS и переходя к интегралам по контуру (L) и поверхности (S), получим

$$\oint_L P(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 =$$

$$= -\iint_S \left[\frac{\partial P(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial P(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right] \cos(n, x_3)\, dS. \quad (***)$$

Как известно *, косинусы углов, которые составляет внешняя нормаль к поверхности $x_3 = f(x_1, x_2)$, с координатными осями имеют выражения:

$$\cos(n, x_1) = \frac{p}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

$$\cos(n, x_2) = \frac{q}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

$$\cos(n, x_3) = \frac{1}{\mp\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

* См., например, В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 1, § 155.

где

$$p=\frac{\partial f}{\partial x_1};\quad q=\frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Отсюда, выбирая в формулах нижний знак (ибо $\cos(n, x_3)>0$), имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}\cos(n, x_3)=-\cos(n, x_2).$$

Тогда формула (***) примет вид

$$\oint\limits_L P dx_1=\iint\limits_S\left[\frac{\partial P}{\partial x_3}\cos(n, x_2)-\frac{\partial P}{\partial x_2}\cos(n, x_3)\right]dS.$$

Рассматривая другие функции — $Q(x_1, x_2, x_3)$ и $R(x_1, x_2, x_3)$ — и совершая циклическую перестановку координат (x_1, x_2, x_3), получим две аналогичные формулы:

$$\oint\limits_L Q dx_2=\iint\limits_S\left[\frac{\partial Q}{\partial x_1}\cos(n, x_3)-\frac{\partial Q}{\partial x_3}\cos(n, x_1)\right]dS;$$

$$\oint\limits_L R dx_3=\iint\limits_S\left[\frac{\partial R}{\partial x_2}\cos(n, x_1)-\frac{\partial R}{\partial x_1}\cos(n, x_2)\right]dS.$$

Складывая полученные формулы, получим формулу (4.4). Теорема Стокса доказана.

В § 4.9 мы дадим более наглядное, хотя и не такое строгое, доказательство теоремы Стокса, исходя из ее векторной формулировки. Здесь же мы приведем еще несколько замечаний, относящихся в равной степени как к формуле Грина, так и к формуле Стокса; эти замечания, в частности, снимают ограничения относительно условий пересечения поверхности (S) и области (σ) прямыми, параллельными координатным осям.

Замечания к теореме Стокса.

1. Поверхиость S предполагается гладкой или кусочно-гладкой.

2. Поверхность S может быть как угодио расположеиа относительио осей системы координат (x_1, x_2, x_3) (см. S_0 иа рис. 4.3), а также может иметь границу в виде нескольких замкиутых коитуров (например, поверхиость S' иа рис. 4.3).

Поверхиость S_0 всегда может быть разрезаиа иа конечиое число подходящих кусков, к которым примеияется теорема Стокса, затем результаты складываются (ср. замечание 3 к теореме Остроградского). Поверхиость S' можно разрезать, например, по AB и считать за ее граннцы коитуры L, l' и два берега AB. Тогда к такой поверхиости можио применить формулу Стокса. При «склеиваиии» по AB криволииейные иитегралы по двум берегам AB взаимно уиичтожаются, ибо оии вычисляются в противоположиых иаправлеииях, и останутся только интегралы по L и l'.

Пусть векторное поле $A(r)$ имеет в системе (x_1, x_2, x_3) компоненты:

$$A_1 = P(x_1, x_2, x_3);$$
$$A_2 = Q(x_1, x_2, x_3);$$
$$A_3 = R(x_1, x_2, x_3).$$

Тогда формула (4.4) примет вид

$$\iint\limits_S \left\{ \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) \cos(n, x_1) + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \cos(n, x_2) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \cos(n, x_3) \right\} dS = \oint\limits_L A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3. \quad (4.5)$$

Если обозначить дифференциал радиус-вектора вдоль контура (L) через $dL = i_1 dx_1 + i_2 dx_3 + i_3 dx_3$, то правая часть этой формулы может быть записана в виде

$$\oint\limits_L A \cdot dL;$$

Векторную интерпретацию левой части формулы мы приведем позже (стр. 173).

Связность области. Преобразуя интеграл по контуру в интеграл по поверхности по формуле Стокса, надо всегда помнить, что и контур L, и поверхность S, для которой контур L служит границей, должны целиком лежать в рассматриваемой области, где выполнены условия теоремы Стокса. Однако могут быть такие области, что не для каждого контура L, лежащего целиком в рассматриваемой области, можно выбрать соответствующую поверхность S.

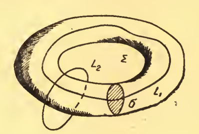


Рис. 4.5.

Двухсвязная область вне тора может быть сделана одиосвязной, если к ее границам добавить перепонку (Σ), закрывающую отверстие кольца. Двухсвязная область внутри тора станет одиосвязной, если к ее границам присоединить перегородку (σ)

Например, если область представляет из себя внутренность тора, то для контура L_1 (рис. 4.5) нельзя подобрать такую поверхность, которая была бы ограничена этим контуром и лежала целиком внутри тора. Если рассматривается область вне тора, то для контура L_2 нельзя выбрать поверхность, для которой границей служил бы только этот контур и которая не пересекала бы тора, т. е. находилась целиком в области вне тора.

Односвязной называется область, в которой любой замкнутый контур может быть стянут в точку непрерывным образом, не пересекая границ этой области. Односвязными областями являются: все пространство, вся плоскость, часть плоскости, ограниченная одной замкнутой кривой, область внутри (или вне) шара, куба и т. п.

Если вырезать из всего пространства некоторую кривую, замкнутую или простирающуюся на бесконечность, то в таком пространстве можно найти контур, который нельзя стянуть в точку, оставляя его все время в рассматриваемой области. Такое пространство дает пример *двухсвязной области* (рис. 4.6). Пространство внутри (или вне) тора — двухсвязное (рис. 4. 5).

Могут быть трехсвязные области (рис. 4.6) и вообще области n-й связности. Область n-й связности может быть превращена в односвязную область присоединением дополнительных границ, «запрещающих» те контуры, которые не могут быть стянуты в точку. Например, область внутри тора может быть сделана односвязной, если присоединить к ней границу в виде перегородки σ (рис. 4.5); область вне тора будет односвязной, если к ее границам добавить поверхность Σ, закрывающую отверстие кольца.

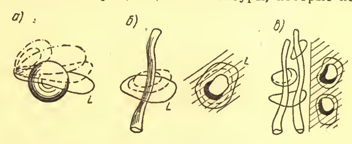


Рис. 4.6. Одно- и многосвязные области:

а) область вне шара является односвязной: любой контур L можно стянуть в точку, не выходя за пределы области; б) двухсвязные области: область вне трубки, плоскость вне выреза — контур L невозможно стянуть в точку, не пересекая трубки (выреза); в) трехсвязные области: область вне двух трубок, плоскость вне двух вырезов

4.3. Скалярное поле. Производная по направлению. Оператор ∇

Поверхности уровня. Геометрической характеристикой скалярного поля являются поверхности уровня.

Рассмотрим скалярное поле величины φ в системе декартовых координат (x_1, x_2, x_3), так что

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x_1, x_2, x_3).$$

Те точки, для которых скаляр φ принимает некоторое одинаковое значение C, образуют поверхность

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = C.$$

Такая поверхность носит название *поверхности уровня* или изоповерхности.

Придавая различные значения C, мы получим набор, семейство поверхностей уровня, на каждой из которых скаляр принимает постоянное значение (рис. 4.7).

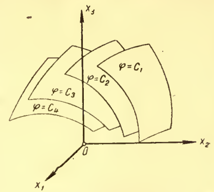


Рис. 4.7. Поверхности уровня скалярного поля

Семейство поверхностей уровня в некоторой степени наглядно характеризует скалярное поле. Места сближения изоповерхностей указывают на быстрое изменение здесь функции φ в поперечном направлении.

Изоповерхности для однозначного поля φ не пересекаются, ибо в этом случае в точках пересечения функция φ имела бы несколько значений, что невозможно.

Наиболее существенной характеристикой скалярного поля является дифференциальная его характеристика — *градиент скалярного поля.*

Градиент скалярного поля и производная по направлению

Дифференциальная характеристика скалярного поля является обобщением производной по скалярному аргументу.

При анализе поведения функции $f(t)$ скалярного аргумента в некоторой точке M $(t = t_0)$ главную роль играют значения производных $\frac{df}{dt}$, $\frac{d^2f}{dt^2}$ и т. д. в этой точке. При этом производная $\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=t_0}$, если она существует, позволяет судить о том, как быстро изменяется функция $f(t)$ при смещении из точки M по оси аргумента t в положительном направлении этой оси. Как известно, эта производная является численным значением быстроты изменения функции *в точке* M вдоль положительного направления оси аргумента t.

В случае скалярного поля, определяемого функцией φ трех переменных x_1, x_2, x_3, составляющих вектор $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_1x_1 + \boldsymbol{i}_2x_2 + \boldsymbol{i}_3x_3$, можно ожидать, что совокупность значений

трех производных в некоторой точке поля M: $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)_{M}$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)_{M}$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)_{M}$ — позволит определить, как быстро меняется поле $\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv \varphi(\boldsymbol{r})$ при смещении из точки M по *любому направлению* в поле.

Если в каждой точке поля $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ существуют производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$, то их совокупность составляет вектор и позволяет найти быстроту изменения поля по любому направлению.

Ранее (стр. 95) было показано, что три величины $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ образуют вектор.

Этот вектор называется *градиентом* поля φ и обозначается $\operatorname{grad}\varphi$. Если $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ — орты декартовой системы (K), то

$$\operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{i}_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \boldsymbol{i}_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \boldsymbol{i}_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = \boldsymbol{i}_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}. \tag{4.6}$$

Рассмотрим теперь, как при помощи $\operatorname{grad}\varphi$ можно определить быстроту изменения поля по любому направлению. Средняя быстрота изменения поля φ при смещении из точки M в M' по некоторому направлению, определяемому ортом $\boldsymbol{l}$, характеризуется отношением

$$\frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{M'M},$$

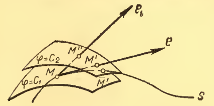


Рис. 4.8. Производная по направлению и по кривой. По направлению l_1 поле меняется быстрее, чем по l

где $M'M$ — величина смещения по направлению $\boldsymbol{l}$ (рис. 4.8).

Ясно, что это отношение будет другим для направления $\boldsymbol{l}_1$ (см. рис. 4.8), ибо хотя $\varphi(M') = \varphi(M'')$ (точки M' и M'' находятся на одной поверхности уровня), но $M'M \neq M''M$.

Таким образом, по некоторым направлениям поле меняется быстрее, по некоторым — медленнее.

Предел этого отношения, если он существует, когда точка M' приближается по прямой $\boldsymbol{l}$ к M, называется *производной от φ в точке M по направлению $\boldsymbol{l}$* и обозначается $\frac{d\varphi}{dl}$:

$$\frac{d\varphi}{dl} = \lim_{M' \to M}\frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{M'M}.$$

Эта производная и есть численное значение быстроты изменения поля φ в точке M в направлении $\boldsymbol{l}$.

Если $\varphi(M) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$, то

$$\varphi(M') = \varphi[x_1 + M'M \cdot \cos(l, x_1),$$
$$x_2 + M'M \cdot \cos(l, x_2),\ x_3 + M'M \cdot \cos(l, x_3)].$$

Разлагая $\varphi(M')$ в ряд Тейлора, получим

$$\varphi(M') = \varphi(M) + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cos(l,\ x_1) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cos(l,\ x_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\cos(l,\ x_3)\right] M'M + O(M'M^2),$$

где $O(M'M^2)$ — величина второго порядка малости относительно смещения $M'M$.

Тогда, вычисляя $\frac{d\varphi}{dl}$, получим

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cos(l,\ x_1) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cos(l,\ x_2) +$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\cos(l,\ x_3) = l_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}. \tag{4.7}$$

Это выражение может быть записано в виде

$$\frac{d\varphi}{dl} = l \cdot \operatorname{grad}\varphi. \tag{4.8}$$

Следовательно, *производная от φ по направлению l равна проекции градиента φ на это направление.*

Таким образом, если в точке поля определен $\operatorname{grad}\varphi$, то всегда можно найти быстроту изменения поля вдоль любого заданного направления. Поэтому говорят, что $\operatorname{grad}\varphi$ является мерой неоднородности скалярного поля φ.

Как видно, вектор $\operatorname{grad}\varphi$ в любой точке поля определяет бесконечную совокупность производных по направлению функции φ. В выражении для $\frac{d\varphi}{dl}$ характеристика поля (однозначная вектор-функция точки $\operatorname{grad}\varphi$) и характеристика направления (орт l, не зависящий от поля φ) разделены.

Производная по кривой. Понятие производной по направлению тесно связано с понятием *производной по линии* или *производной по кривой.*

Рассмотрим кривую s, проходящую через точку M, в которой направление касательной к этой кривой совпадает с направлением l (рис. 4 8).

Если вычислить предел

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{M' \to M}\frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{\Delta s},$$

где M' — точка на кривой (s), а Δs — длина дуги $\overset{\frown}{M'M}$ по кривой (s), то получим

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dl}. \tag{4.9}$$

Действительно, если уравнение кривой (s) записать в виде (s — параметр, представляющий длину дуги кривой):

$$x_1 = x_1(s);$$
$$x_2 = x_2(s);$$
$$x_3 = x_3(s),$$

то $\varphi = \varphi[x_1(s),\ x_2(s),\ x_3(s)]$. Поэтому, используя правило дифференцирования сложных функций, получим *

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{ds} =$$
$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cos(l,\ x_1) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cos(l,\ x_2) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\cos(l,\ x_3) = \frac{d\varphi}{dl}.$$

Производная $\frac{d\varphi}{ds}$ называется *производной поля* φ *по линии* (s). Она, следовательно, численно равна производной по направлению, касательному в рассматриваемой точке к данной кривой.

Свойства градиента скалярного поля. Для выяснения свойств градиента поля запишем (4.8) в виде

$$\frac{d\varphi}{dl} = |\operatorname{grad}\varphi| \cos(\boldsymbol{l},\ \operatorname{grad}\varphi).$$

Отсюда следует:

1. *Быстрота изменения поля имеет наибольшее значение в направлении* $\operatorname{grad}\varphi$ [когда $\cos(\boldsymbol{l},\ \operatorname{grad}\varphi) = 1$] *и равна*

$$\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_{\max} = |\operatorname{grad}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2}.$$

2. *Вектор* $\operatorname{grad}\varphi$ *направлен по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции* φ.

Действительно, если орт $\boldsymbol{l}$ лежит в плоскости, касательной к поверхности уровня, то по определению этой поверхности $[\varphi(x_1, x_2, x_3) = \text{const}]$ для любой кривой, лежащей на поверхности уровня и касающейся $\boldsymbol{l}$, имеем $\frac{d\varphi}{ds} = 0$, а вследствие (4.9) имеем $\frac{d\varphi}{dl} = 0$. Значит вектор $\operatorname{grad}\varphi$ ($|\operatorname{grad}\varphi| \neq 0$) направлен по нормали к поверхности уровня, а вследствие $\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_{\max} = |\operatorname{grad}\varphi| > 0$ — в сторону возрастания значений φ (рис. 4.9).

Отсюда следует, что если $\boldsymbol{n}$ — орт нормали к поверхности уровня, направленный *в сторону роста* φ, то

$$\frac{d\varphi}{dn} = |\operatorname{grad}\varphi| \quad \text{и} \quad \operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{n}\frac{d\varphi}{dn}. \qquad (4.10)$$

---

* Относительно равенства $\frac{dx_i}{ds} = \cos(\boldsymbol{l},\ x_i)$ см. задачу 1, гл. 4.

Оператор ∇ и другое определение grad φ. Векторное поле градиента скаляра φ имеет ряд особенностей, на которых мы специально остановимся в 4.10. Сейчас нам важно отметить, что для его построения надо проделать над функцией φ ряд операций: взять частные производные от φ, умножить на соответствующие орты и сложить — тогда получим вектор grad φ. Обычно совокупность этих операций обозначают одним символом — *оператор* ∇ (*набла*), который, таким образом, в прямоугольных декартовых координатах имеет вид

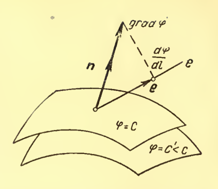


Рис. 4. 9. Градиент скалярной функции направлен по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания φ

$$\nabla \equiv \boldsymbol{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \qquad (4.11)$$

Будучи применен к скаляру φ, этот оператор дает векторное поле градиента φ, так что в прямоугольных декартовых координатах

$$\nabla\varphi \equiv \operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{i}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \qquad (4.12)$$

Вектор grad φ может быть определен независимо от системы координат. Применим формулу Остроградского (4.3, а) для специального вида векторного поля

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}\varphi(x_1, x_2, x_3),$$

где $\boldsymbol{c}$ — вектор произвольный, но постоянный.

Подставляя это выражение для $\boldsymbol{A}$ в (4.3, а) получим вследствие постоянства $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{c} \cdot \left(\iiint\limits_{\tau} \operatorname{grad}\varphi d\tau - \iint\limits_{S} \varphi \boldsymbol{n} dS \right) = 0.$$

Поскольку вектор $\boldsymbol{c}$ произволен, то равенство нулю скалярного произведения на другой вектор означает равенство нулю этого вектора, т. е.

$$\iiint\limits_{\tau} \operatorname{grad}\varphi d\tau = \iint\limits_{S} \varphi \boldsymbol{n} dS. \qquad (4.13)$$

Пусть теперь τ малый объем, окружающий некоторую точку M скалярного поля φ. Возьмем какую-либо из компонент $\operatorname{grad}\varphi$, например $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$. Тогда по теореме о среднем имеем

$$\iiint\limits_{\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,d\tau=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)_{M'}\tau,$$

где точка M' — какая-то средняя точка объема τ.

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)_{M'}=\frac{1}{\tau}\iint\limits_{S}\varphi\cos(n,\,x_1)\,dS.$$

Будем теперь стягивать объем τ к точке M так, чтобы его поверхность S также стремилась к нулю. Тогда средняя точка M' сольется с M в силу непрерывности $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ и

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)_{M}=\lim_{\substack{S\to 0\\ \tau\to 0}}\frac{1}{\tau}\iint\limits_{S}\varphi\cos(n,\,x_1)\,dS.$$

Так как аналогичные соотношения справедливы для других компонент, то

$$(\nabla\varphi)_M=(\operatorname{grad}\varphi)_M=\lim_{\substack{S\to 0\\ \tau\to 0}}\frac{1}{\tau}\iint\limits_{S}\varphi\boldsymbol{n}\,dS. \tag{4.14}$$

Это равенство, если предел справа существует, может служить определением градиента скалярного поля. Преимущество этого определения состоит в том, что оно не содержит никакого указания на координатную систему и потому может быть использовано для определения проекции градиента на оси любой системы координат (косоугольной декартовой, криволинейной и т. п.).

4.4. Векторное поле. Дивергенция и вихрь векторного поля. Дифференцирование вектора по направлению

Векторные линии. Геометрической характеристикой векторного поля могут служить *векторные линии.*

Векторными линиями поля $\boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{r})$ *называются кривые, в каждой точке которых касательная имеет направление вектора в этой точке* (рис. 4.10).

Векторные линии поля $\operatorname{grad}\varphi$ представляют собой кривые ортогональные в каждой точке к поверхностям уровня $\varphi=\text{const}$; это — линии быстрейшего изменения функции φ $(\boldsymbol{r})$.

Векторные линии поля скоростей вращающегося твердого тела представляют концентрические окружности с центрами на оси вращения, а векторные линии поля скоростей твердого тела, движущегося прямолинейно — прямые линии.

Рис. 4.10. Векторные линии поля A (r)

Векторные линии поля скоростей движущейся жидкости — *линии тока* — в общем случае имеют различный вид в разные моменты времени $[\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}, t)]$; в случае стационарного поля скоростей $[\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})]$, т. е. когда движение жидкости установившееся, векторные линии имеют неизменный вид и представляют траектории частиц жидкости. В тех местах, где линии тока сгущаются, движение жидкости более интенсивно, скорость движения здесь возрастает *.

Если задано векторное поле $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$, то, по определению векторной линии, ее элемент $d\boldsymbol{r}$, направленный по касательной, коллинеарен с вектором $\boldsymbol{A}$ в данной точке, т. е.

$$d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A} = 0. \qquad (4.15)$$

Это есть векторная форма дифференциального уравнения векторных линий. Отсюда, учитывая пропорциональность компонент коллинеарных векторов, получим в декартовой системе координат

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{A_2(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{A_3(x_1, x_2, x_3)}. \qquad (4.15)$$

Проинтегрировав эту систему двух дифференциальных уравнений, получим семейство векторных линий поля $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$.

В случае нестационарного поля $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ дифференциальное уравнение векторных линий имеет аналогичный вид: при этом время t надо рассматривать как фиксированный параметр, определяющий в каждый момент времени вид семейства линий тока.

Если $\boldsymbol{A} \neq 0$** в некоторой точке, то через нее проходит одна и только одна векторная линия, касательная к которой в данной точке имеет определенное направление, т. е. совпадает

---

* В сверхзвуковом потоке — наоборот, скорость в местах сгущения векторных линий убывает.

** Теорема существования решения системы (4.15) требует, кроме $A \neq 0$, еще и непрерывности A_1, A_3, A_3 вместе с их первыми производными по координатам.

по направлению с вектором поля; уравнение какой-либо линии тока выделяется из семейства определением постоянных интегрирования из условия прохождения через данную точку.

Если в какой-то точке $\boldsymbol{A} = 0$ (все знаменатели (4.15) обращаются в нуль), то направление векторной линии в этой точке становится неопределенным; через эту точку может проходить бесконечное множество линий, может и не проходить ни одной. Такие точки являются особыми точками системы уравнений (4.15).

Векторные линии могут дать некоторые сведения о структуре векторного поля. Более существенны дифференциальные характеристики векторного поля.

Поток векторного поля. Пусть двусторонняя и кусочно-гладкая поверхность S, замкнутая или незамкнутая, помещена в векторное поле $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$. Рассмотрим ее элемент dS и определим в некоторой точке этого элемента положительный орт нормали $\boldsymbol{n}$ и вектор поля $\boldsymbol{A}$ (рис. 4.11).

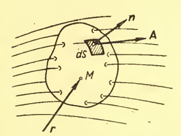


Рис. 4.11. Поток векторного поля через поверхность

Потоком векторного поля $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ через элемент dS называется величина

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = A_n dS.$$

Потоком векторного поля $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ через всю поверхность S называется поверхностный интеграл

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \iint_S A_n dS. \tag{4.16}$$

Этот интеграл определяется как для замкнутой, так и для незамкнутой поверхности S. Поверхностный интеграл понимается как сумма соответствующих интегралов по гладким кускам, составляющим поверхность. Скалярное произведение $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$ выражает проекцию вектора поля на положительное направление нормали $\boldsymbol{n}$. Понятие потока векторного поля определено независимо от системы координат; в системе декартовых координат поток может быть записан в форме

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \iint_S \{A_1\cos(x_1, \boldsymbol{n}) + A_2\cos(x_2, \boldsymbol{n}) + A_3\cos(x_3, \boldsymbol{n})\}\, dS.$$

Смысл понятия потока векторного поля через поверхность поясним на характерном примере.

Пусть в пространстве задано стационарное движение несжимаемой жидкости, заполняющей неразрывно данное пространство, так что вектор скорости течения жидкости $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ есть непрерывная функция точки.

Определим количество жидкости, протекающей в единицу времени через некоторый кусок гладкой поверхности S (рис. 4.12).

Рассмотрим на поверхности некоторый элемент dS с внешней нормалью $\boldsymbol{n}$. Контур этого элемента определяет элементарную *трубку тока* AB — поверхность, образованную векторными линиями, проведенными через точки небольшого замкнутого контура. Через любое поперечное сечение трубки проходит в единицу времени одинаковое количество жидкости. Чтобы подсчитать это количество, заметим, что за единицу времени dt

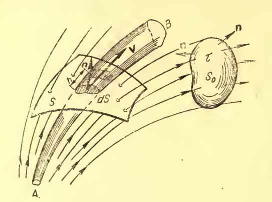


Рис. 4.12. Поток векторного поля скорости движения жидкости через поверхность численно равен объему жидкости, протекающей в единицу времени через эту поверхность

через dS пройдет объем жидкости, равный объему цилиндра с основанием dS и образующей $|V|dt$, а высота h этого цилиндра, очевидно, равна проекции вектора Vdt на нормаль к основанию, т. е.

$$h = |V|\,dt\,|\cos(\boldsymbol{n}, V)| = |V\cdot\boldsymbol{n}|\,dt.$$

Следовательно, *в единицу* времени через элемент dS пройдет в направлении $\boldsymbol{n}$ объем жидкости, равный

$$dQ = |V|\cos(\boldsymbol{n}\cdot V)\,dS = V\cdot\boldsymbol{n}dS.$$

Полный объем Q жидкости, протекающей в единицу времени через всю поверхность S, получается интегрированием dQ по всей поверхности, т. е.

$$Q = \iint\limits_S V\cdot\boldsymbol{n}dS.$$

Таким образом, поток векторного поля скорости V несжимаемой жидкости через элемент поверхности dS численно равен объему жидкости, протекающей в единицу времени через соответствующую трубку тока, а поток V через поверхность S (замкнутую или незамкнутую) численно равен объему жидкости, протекающей в единицу времени через эту поверхность.

Если жидкость несжимаема, то для подсчета массы жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени, достаточно объем умножить на постоянную всюду плотность жидкости, т. е.

$$m = \rho Q = \rho \iint_S V \cdot n dS.$$

В случае сжимаемой жидкости необходимо для подсчета m задать скалярное поле плотности, т. е. $\rho = \rho(r)$. Тогда масса жидкости, протекающая в единицу времени через поверхность S, равна потоку вектора $\rho(r) V(r)$ через эту поверхность, т. е.

$$m = \iint_S \rho V \cdot n dS. \tag{4.17}$$

Величина $A \cdot n dS$ положительна, если A и n образуют острый угол, и отрицательна, если эти два вектора образуют тупой угол. Следовательно, в нашем примере $Q = \iint_S V \cdot n dS$ представляет собой *избыток* жидкости, протекающей в сторону положительной нормали n, а не абсолютное количество жидкости, прошедшей через S независимо от направления течения.

В связи с этим особо отметим случай замкнутой поверхности (S_0 на рис. 4.12), ограничивающей некоторый объем τ. Условимся всегда направлять n во внешнюю часть пространства так, что движение жидкости в сторону положительной нормали n означает «вытекание» из объема τ, а в сторону $(-n)$ — «втекание». Тогда величина потока Q, вычисленная для замкнутой поверхности, даст разность между жидкостью, вытекающей из объема, ограниченной этой поверхностью, и жидкостью, поступающей в этот объем. Равенство нулю потока скорости жидкости через замкнутую поверхность означает, следовательно, что в объем τ втекает жидкости столько, сколько и вытекает. Если поток Q положителен, то в объеме τ есть источники, т. е. такие места, где жидкость как-то создается (например трубочки, из которых выбрасывается дополнительно жидкость, куски тающего льда и т. п.). Если поток Q отрицателен, то в объеме τ есть *стоки*, где жидкость как-то «уничтожается» (замерзает, испаряется и т. п.).

Если жидкость сжимаема, т. е. плотность $\rho = \rho(r)$, то роль источников для потока скорости могут выполнять места разрежения, уменьшения плотности, а роль стоков — места уплотнения, увеличения плотности. Действительно, поскольку масса жидкости остается неизменной и уменьшение плотности означает увеличение объема, занимаемого жидкостью, то из мест разрежения появится дополнительный поток жидкости, увеличивающий ее скорость.

Таким образом, величина потока вектора через замкнутую поверхность позволяет некоторым образом оценить поведение поля в области, ограниченной этой поверхностью. Однако такая оценка для конечной области может оказаться весьма приближенной. Например, равенство нулю потока поля скорости жидкости через замкнутую поверхность может означать или отсутствие внутри объема, ограниченного ею, источников и стоков, или наличие источников и стоков равной мощности *, или, по крайней мере, наличие такого распределения источников и стоков, что их общая мощность равна нулю.

В связи с этим оказывается удобным ввести в рассмотрение *локальную*, точечную характеристику распределения источников и стоков в данном поле жидкости, так называемую дивергенцию** скорости.

Рассмотрим подробнее понятие дивергенции векторного поля.

Дивергенция векторного поля. Векторная формулировка теоремы Остроградского. Дивергенция векторного поля $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ является скалярной функцией точки и, таким образом, образует скалярное поле, построенное по данному векторному полю.

Фиксированную точку M векторного поля окружим произвольной замкнутой поверхностью S, вычислим поток вектора $\boldsymbol{A}$ через S и разделим на величину объема τ, ограниченного S:

$$\frac{1}{\tau}\iint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS.$$

При гидродинамической интерпретации потока вектора эта величина может быть названа средней мощностью источников и стоков в объеме τ, приходящейся на единицу объема.

Может оказаться, что существует предел этого отношения, когда объем τ стягивается по произвольному закону к точке M так, что площадь поверхности S, ограничивающей этот объем, и величина объема τ стремятся к нулю. Тогда этот предел называется *дивергенцией* поля $\boldsymbol{A}$ в точке M и обозначается $(\operatorname{div}\boldsymbol{A})_M$. Таким образом, по определению

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{A})_M = \lim_{\substack{\tau\to 0\\(\tau)\to M}}\frac{1}{\tau}\iint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS. \tag{4.18}$$

Значение этого предела не должно, по определению, зависеть от вида поверхности S.

---

* Под мощностью источника (стока) понимается количество жидкости, которое выбрасывается (забирается) в единицу времени источником (стоком).

** divergentia (лат.) — расходимость.

Не для всякого векторного поля $\boldsymbol{A}$ можно построить поле дивергенции div $\boldsymbol{A}$.

Дивергенция векторного поля $\boldsymbol{A}$ существует в каждой точке, если компоненты поля A_1, A_2, A_3 непрерывны вместе с частными производными по координатам.

Доказательство этого утверждения следует из теоремы Остроградского. В предположении существования и непрерывности A_1, A_2, A_3, $\frac{\partial A_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial A_2}{\partial x_2}$, $\frac{\partial A_3}{\partial x_3}$ из формулы (4.3, а) имеем:

$$\frac{1}{\tau}\iint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{1}{\tau}\iiint\limits_\tau \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right) d\tau.$$

Если область τ стягивается к некоторой своей внутренней точке M, то интеграл справа имеет предел, равный

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)_M.$$

Тогда, следовательно, должен существовать и предел левой части, который по определению (4.18) равен дивергенции поля $\boldsymbol{A}$ в точке M.

Таким образом, div $\boldsymbol{A}$ в декартовых координатах вычисляется по формуле

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \equiv \frac{\partial A_k}{\partial x_k}. \tag{4.19}$$

Это же выражение можно получить непосредственно, если подсчитать поток вектора $\boldsymbol{A}$ через поверхность бесконечно малого параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям. Выбор такой поверхности не ограничивает общности определения div $\boldsymbol{A}$, ибо предел (4.18) не зависит, по определению, от формы поверхности S.

Пусть ΔS_1, ΔS_2, ΔS_3 — площади граней бесконечно малого параллелепипеда (рис. 4.13), перпендикулярных соответственно осям x_1, x_2, x_3. На противоположных гранях орты нормалей равны $\boldsymbol{i}_k$ и $-\boldsymbol{i}_k$, где $\boldsymbol{i}_k$ — орт оси (x_k). Тогда

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \iint\limits_{(S)} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS =$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \{[\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{A}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{A}(x_1, x_2, x_3)]\Delta S_1 + \ldots\} =$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \{[A_1(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - A_1(x_1, x_2, x_3)]\Delta S_1 + \ldots\} =$$

$$= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \Delta x_k \Delta S_k.$$

Поскольку

$$\Delta x_1 \Delta S_1 = \Delta x_2 \Delta S_2 = \Delta x_3 \Delta S_3 = \tau,$$

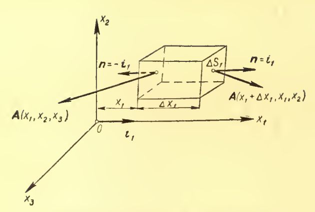


Рис. 4.13. Вычисление div A в прямоугольных декартовых координатах

то

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}.$$

Следует однако подчеркнуть, что скалярное поле div $\boldsymbol{A}$ введено независимо от координатной системы и в выражении (4.18) правая часть, очевидно, не зависит от выбора системы координат.

Для того чтобы получить выражение div $\boldsymbol{A}$ в любой другой системе координат, можно воспользоваться определением (4.18), где в качестве бесконечно малой поверхности S выбирать поверхность, состоящую из кусков координатных поверхностей.

Используя понятие дивергенции, введенное независимо от координатной системы, можно записать формулу Остроградского (4.3,а) в виде

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{A} \, d\tau = \iint_{S} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \, dS. \tag{4.20}$$

В таком виде формула Остроградского имеет широкое применение во многих разделах теоретической физики.

Таким образом, теорема Остроградского может быть сформулирована так:

Интеграл по объему от дивергенции векторного поля равен потоку поля через поверхность, ограничивающую этот объем, если компоненты поля вместе с их частными производными непрерывны в объеме и на поверхности.

Используя выражение (4.11) для оператора ∇, можно записать $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ в виде

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = \boldsymbol{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}. \tag{4.21}$$

Таким образом, в этом случае применение оператора ∇ к вектору $\boldsymbol{A}$ означает скалярное умножение символического вектора ∇ на данный вектор $\boldsymbol{A}$.

Рассматривая выражения (4.14) и (4.18), мы можем придать оператору ∇ вид, не зависящий от системы координат:

$$\nabla(\ldots) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \iint\limits_S \boldsymbol{n} (\ldots) \, dS. \tag{4.22}$$

Эта символическая запись устанавливает, что применение оператора ∇ к некоторому выражению (...), скаляру φ или вектору $\boldsymbol{A}$, означает вычисление определенного предела, стоящего справа в (4.22), а именно:

$$\nabla \varphi = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \iint\limits_S \boldsymbol{n} \varphi \, dS;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \iint\limits_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A} \, dS.$$

Рассмотрим несколько примеров, разъясняющих физический смысл дивергенции векторного поля.

1) Дивергенция поля скорости жидкости. Рассмотрим стационарное поле скорости $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ жидкости. Выберем в нем некоторую точку M и окружим ее поверхностью S, ограничивающую объем τ. Если поток скорости через эту поверхность положителен и, следовательно, $\frac{1}{\tau} \iint\limits_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \, dS > 0$, то это значит, что из области τ через S вытекло жидкости по *объему* больше, чем вошло. Если в области τ нет ни источников, ни стоков, то тогда мы должны заключить, что в области происходит расширение жидкости, т. е. уменьшение ее плотности. Величина $\frac{1}{\tau} \iint\limits_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \, dS$ характеризует в среднем это объемное расширение жидкости в области τ в единицу времени, т. е. она представляет собой среднюю скорость объемного расширения (или сжатия, если она отрицательна) жидкости в области τ. Следовательно, предел

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{V})_M = \lim_{\substack{\tau \to 0 \\ (\tau) \to M}} \frac{1}{\tau} \iint\limits_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \, dS,$$

если он существует, характеризует *скорость изменения объема жидкости в точке* (M). Это означает, что если частица жидкости в точке M имела объем $\Delta\tau$, то через единицу времени ее объем будет $\Delta\tau'$, причем

$$\Delta\tau' = \Delta\tau\,(1 + \operatorname{div} \boldsymbol{V}).$$

Естественно, что в поле течения несжимаемой жидкости, лишенной источников и стоков, в каждой точке $\operatorname{div} V = 0$.

2) Уравнение неразрывности. В случае стационарного движения жидкости в любую замкнутую область в единицу времени войдет *по массе* столько жидкости, сколько и выйдет, если внутри этой области нет источников и стоков. Таким образом, учитывая (4.17), получим для любой замкнутой поверхности

$$\iint\limits_S \rho V \cdot n dS = 0.$$

Если плотность и скорость жидкости в каждой точке может меняться с течением времени, т. е. $\rho = \rho(r, t)$, $V = V(r, t)$, то в области τ, ограниченной поверхностью S, в единицу времени происходит изменение массы жидкости, равное

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_\tau \rho d\tau.$$

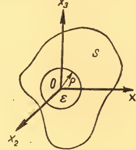


Рис. 4.14. Выделение особой точки в начале координат

Поскольку область τ занимает некоторый фиксированный объем, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_\tau \rho d\tau = \iiint\limits_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau.$$

Это изменение массы жидкости внутри неподвижной поверхности должно быть равно той массе, которая прошла в область τ через поверхность S, т. е.

$$\iiint\limits_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\iint\limits_S \rho V \cdot n\, dS.$$

(Знак (—) здесь поставлен в связи с тем, что $+\iint\limits_S n \cdot \rho V dS$ определяет массу, вытекающую из τ, ибо n — орт внешней к τ нормали.)

Воспользовавшись формулой Остроградского для преобразования правой части этого выражения, получим

$$\iiint\limits_\tau \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho V\right) d\tau = 0.$$

Так как это уравнение имеет место для любого объема τ, то при непрерывности подынтегрального выражения имеем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho V = 0. \qquad (4.23)$$

Это — известное уравнение неразрывности аэромеханики.

3) Поле источников и стоков. Рассмотрим векторное поле вида

$$A(r) = q \frac{r}{r^3},$$

где $q = \text{const}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_1 x_1 + \boldsymbol{i}_2 x_2 + \boldsymbol{i}_3 x_3$ — раднус-вектор. Вычнслнм днвергенцню этого поля. Получим:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} = \frac{q\,(r^2 - 3x_1^2)}{r^5};$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x_2} = \frac{q\,(r^2 - 3x_2^2)}{r^5};$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \frac{q\,(r^2 - 3x_3^2)}{r^5}.$$

Отсюда во всех точках, *кроме начала координат* ($r = 0$), нмеем:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = 3\frac{q}{r^3} - \frac{3qr^2}{r^5} = 0.$$

В начале коордннат $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ (впрочем, как н сам вектор $\boldsymbol{A}$) не определена; эта точка не прннадлежнт полю.

Нетрудно вндеть, что для любой областн, не включающей начало координат, поток через ее поверхность S равен нулю, ибо во всех точках области $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$, н, следовательно, по теореме Остроградского (4.3,а) и поток через S равен нулю

Вычнслнм поток вектора $\boldsymbol{A}$ через замкнутую поверхность, окружающую начало координат.

Если поверхность S окружает начало коордннат, т. е. область τ включает точку, где ни $\boldsymbol{A}$, ни $\dfrac{\partial A_k}{\partial x_k}$ не определены, то непосредственное прнмененне теоремы Остроградского невозможно. Для вычнслення потока вектора $\boldsymbol{A}$ через S опншем нз начала коордннат сферу радиуса ρ с поверхностью ε (рнс. 4.14), прнменим теорему Остроградского к областн τ', заключенной между S и ε. В этой области всюду $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$, поэтому

$$\iint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS + \iint\limits_\varepsilon \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,d\varepsilon = 0.$$

Но на сфере (ε) имеем:

$$\boldsymbol{A}\,|_\varepsilon = \boldsymbol{A}\,|_{r=\rho} = q\,\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3};$$

$$\boldsymbol{n}\,|_\varepsilon = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = -\iint\limits_\varepsilon \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,d\varepsilon = \iint\limits_\varepsilon q\,\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho}\,d\varepsilon = \frac{q}{\rho^2}\iint\limits_\varepsilon d\varepsilon = 4\pi q.$$

Такнм образом, поток векторного поля $\boldsymbol{A}$ через поверхность, охватывающую начало коордннат, отличен от нуля и равен $4\pi q$.

Это векторное поле называется полем точечного ***источника*** ($q > 0$) нли ***стока*** ($q < 0$) (ср. задачу 24, гл. 4). Общий характер векторных лнннй полей точечного нсточника и стока показан на (рнс. 4.15). Обычно поле источника запнсывают в виде

$$\boldsymbol{A} = \frac{Q}{4\pi}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{4.24}$$

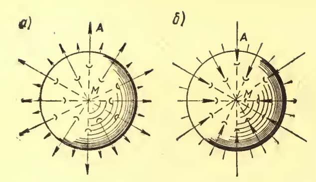


Рис. 4.15. а) Источник. б) Сток

где Q — мощность (обильность) источника или стока, равная потоку вектора $\boldsymbol{A}$ через поверхность, охватывающую место источника. Таким образом, мощность источника (стока) определяется объемом жидкости, которая выбрасывается (забирается) в единицу времени источником (стоком).

Нетрудно показать, что поле источников, расположенных в точках, определяемых радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ с мощностями $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ имеет вид

$$A = \frac{1}{4\pi}\left(Q_1 \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3} + Q_2 \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3} + \ldots + Q_n \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n|^3}\right) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{n} Q_k \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k|^3}.$$

Вихрь (ротор) векторного поля. Векторная формулировка теоремы Стокса. Наряду с дивергенцией вектора важное значение имеет другая дифференциальная характеристика векторного поля — ротор* вектора $\boldsymbol{A}$, или вихрь вектора $\boldsymbol{A}$. Этот вектор будем обозначать $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$.

Вектор $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ в точке M определяется как предел отношения интеграла по поверхности от аксиального вектора к объему

$$\frac{1}{\tau}\iint\limits_S (\boldsymbol{n}\times \boldsymbol{A})\, dS$$

при стягивании объема τ к точке M.

Таким образом, вектор $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ является аксиальным вектором (псевдовектором), равным по определению

$$(\operatorname{rot}\boldsymbol{A})_M = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ (\tau)\to M}} \frac{1}{\tau}\iint\limits_S (\boldsymbol{n}\times \boldsymbol{A})\, dS. \qquad (4.25)$$

Следовательно, формальное определение вихря поля аналогично определению градиента скалярного поля (4.14), дивер-

* rotare (лат.) — вращать.

генции векторного поля (4.18) в том смысле, что отыскивается предел отношения величины некоторого поверхностного интеграла (в каждом случае своего) к величине объема, ограниченного поверхностью интегрирования, при стягивании области τ к некоторой внутренней точке. Предел этот, по определению, *не зависит от формы бесконечно малой поверхности.*

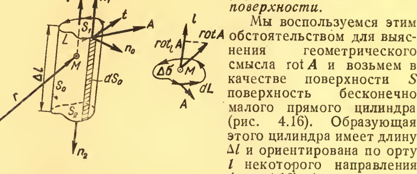


Рис. 4.16. Определение rot A в точке; положительный обход контура L и направление l образуют правую систему

Мы воспользуемся этим обстоятельством для выяснения геометрического смысла rot A и возьмем в качестве поверхности S поверхность бесконечно малого прямого цилиндра (рис. 4.16). Образующая этого цилиндра имеет длину Δl и ориентирована по орту l некоторого направления (рис. 4.16), боковая поверхность — S_0, а донышки S_1 и S_2 имеют равную площадь ($S_1 = S_2 = \Delta\sigma$). Пусть, наконец, на боковой поверхности орт внешней нормали n_0, а на донышках — n_1 и n_2, причем $l = n_1 = -n_2$.

Рассмотрим проекцию rot A на направление образующей цилиндра l. Отбрасывая индекс M в выражении (4.25), получим

$$l \cdot \operatorname{rot} A = \operatorname{rot}_l A = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\Delta l \Delta\sigma} \left\{ \iint_{S_1} l \cdot (n_1 \times A) dS_1 + \right.$$

$$\left. + \iint_{S_2} l \cdot (n_2 \times A)\, dS_2 + \iint_{S_0} l \cdot (n_0 \times A)\, dS_0 \right\}.$$

Так как $l = n_1 = -n_2$, то интегралы по поверхностям S_1 и S_2 в сумме дают нуль.

В интеграле по боковой поверхности S_0 воспользуемся свойством циклической перестановки смешанного произведения:

$$l \cdot (n_0 \times A) = A \cdot (l \times n_0) = A \cdot (n_1 \times n_0).$$

Тогда, замечая, что

$$dS_0 = \Delta l dL,$$

$$(n_1 \times n_0)\, dL = dL,$$

где dL — направленный элемент контура основания цилиндра, получим

$$\frac{1}{\Delta l \Delta \sigma} \iint_{S_0} \boldsymbol{l} \cdot (\boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{A})\, dS_0 = \frac{\Delta l}{\Delta l \Delta \sigma} \oint_L \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{L}.$$

Отметим, что в этом выражении в качестве (L) можно брать контур поперечного сечения цилиндра, содержащего рассматриваемую точку M.

Следовательно,

$$\boldsymbol{l} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta \sigma \to 0} \frac{1}{\Delta \sigma} \oint_L \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{L}. \tag{4.26}$$

Это выражение может служить определением проекции вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ на любое направление $\boldsymbol{l}$. Здесь следует отметить соответствие положительного направления $\boldsymbol{l}$ направлению обхода контура L (рис. 4.19), а именно: направление обхода контура L и положительное направление $\boldsymbol{l}$ подчиняются правилу правого винта (для наблюдателя из вершины $\boldsymbol{l}$ обход контура L совершается против часовой стрелки).

Итак, *проекция* $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ *на какое-либо направление* $\boldsymbol{l}$ *в каждой точке поля равна пределу отношения циркуляции по границе плоской площадки, проходящей через эту точку, перпендикулярно к* $\boldsymbol{l}$, *к площади этой площадки, когда граница площадки стягивается к рассматриваемой точке.*

Так как проекция $\boldsymbol{l} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ будет наибольшей тогда, когда $\boldsymbol{l}$ совпадает по направлению с $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, то и предел отношения циркуляции по границе площадки к площади этой площадки будет наибольшим, если площадка перпендикулярна $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$; это наибольшее значение предела равно модулю $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$.

Проекции вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ на оси декартовой системы через проекции вектора $\boldsymbol{A}$ можно получить двумя способами.

Первый способ состоит в выборе поверхности S в виде параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям, и подсчете правой части выражения (4.25). В качестве упражнения читателю предлагается получить этим путем проекции $\operatorname{rot}_x \boldsymbol{A}$, $\operatorname{rot}_y \boldsymbol{A}$, $\operatorname{rot}_z \boldsymbol{A}$.

Второй способ состоит в использовании выражения (4.22) для оператора ∇. Определение (4.25) вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ показывает, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ получается таким применением оператора ∇ к вектору $\boldsymbol{A}$, которое соответствует векторному умножению символического вектора $\nabla = \boldsymbol{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ на вектор $\boldsymbol{A}$, а именно:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \iint_S (\boldsymbol{n} dS \times \boldsymbol{A}) = \nabla \times \boldsymbol{A}.$$

Отсюда

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}_1 \boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}; \\ \operatorname{rot}_2 \boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}; \\ \operatorname{rot}_3 \boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}. \end{aligned}\right\} \quad (4.27)$$

Сокращенно i-ю компоненту псевдовектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ можно записать в виде

$$\operatorname{rot}_i \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l},$$

причем индексы (i, k, l) составляют циклическую перестановку чисел (1, 2, 3).

Те точки поля, в которых вихрь не равен нулю, называются *вихревыми*. Они могут образовывать целые области — вихревые линии, трубки и т. п.

Вихрь поля скоростей вращающегося твердого тела равен удвоенной угловой скорости вращения.

Действительно, как известно, поле скоростей твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, имеет вид

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенная угловая скорость.

Вычислим

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{V} = \operatorname{rot} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}).$$

Для проекции на ось (x_1), учитывая, что $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от координат, имеем:

$$\operatorname{rot}_1 \boldsymbol{V} = \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2}(\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_3}(\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3) = 2\omega_1.$$

Аналогично получим

$$\operatorname{rot}_2 \boldsymbol{V} = 2\omega_2; \quad \operatorname{rot}_3 \boldsymbol{V} = 2\omega_3.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{V} = 2\boldsymbol{\omega}.$$

В связи с введением понятия вихря поля и определения его независимо от системы координат представляется возможным дать наглядное толкование векторной формулировки теоремы Стокса (4.5).

Учитывая выражения (4.27) для проекций $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$, формулу (4.5) можно записать в виде

$$\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}dS = \oint_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{L}. \qquad (4.28)$$

В таком виде формула, выражающая теорему Стокса, нашла широкое применение. Сама же теорема Стокса, исходя из записи (4.28), может быть сформулирована так:

Поток вихря $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ *векторного поля* $\boldsymbol{A}$ *через поверхность* S, *ограниченную замкнутым контуром* L, *равен циркуляции вектора* $\boldsymbol{A}$ *по этому контуру, если компоненты поля вместе с их частными производными непрерывны на поверхности* S *и на контуре* L.

Дифференцирование векторного поля по направлению. Рассмотрим дифференциальную характеристику векторного поля, подобную градиенту в скалярном поле.

Вектор градиента скалярного поля, заданный в какой-либо точке, определяет бесконечную совокупность производных скаляра по всевозможным направлениям.

В векторном поле под производной вектора $\boldsymbol{A}$ по направлению $\boldsymbol{l}$ (рис. 4.17) будем понимать вектор $\frac{d\boldsymbol{A}}{dl}$, определяемый пределом

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dl} = \lim_{\Delta l\to 0} \frac{\boldsymbol{A}(l+\Delta l) - \boldsymbol{A}(l)}{\Delta l},$$

где l — координата, отсчитываемая по прямой, определяемой ортом $\boldsymbol{l}$. Следует ожидать, что величина, позволяющая определять в точке бесконечную совокупность *векторов* $\frac{d\boldsymbol{A}}{dl}$, будет более высокого ранга, чем вектор (градиент), определяющий совокупность скаляров $\frac{d\varphi}{dl}$.

Рассмотрим в векторном поле поверхность S, окружающую некоторую точку M. В каждой точке этой поверхности отыщем орт $\boldsymbol{n}$ внешней нормали и вектор поля $\boldsymbol{A}$ (рис. 4.18).

Для каждой из трех компонент вектора $\boldsymbol{A}$ составим вектор

$$\boldsymbol{R}_i^{(S)} = \frac{1}{\tau}\iint_S A_i \boldsymbol{n} dS,$$

где τ — объем, ограниченный поверхностью S.

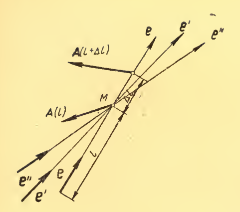


Рис. 4.17.

В каждой точке M векторного поля A можно рассматривать бесконечную совокупность производных вектора по всевозможным направлениям (l, l', l'' и т. д.)

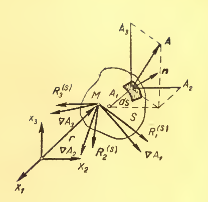


Рис. 4.18.

В каждой точке M векторного поля можно определить три вектора $R_i^{(s)}$, пределы которых при $s \to 0$ дают векторы grad A_i, а проекции их образуют тензор 2-го ранга

Легко проверить, что девять величин (проекции этих трех векторов) составляют тензор 2-го ранга:

$$R_{ik}^{(S)} = \frac{1}{\tau} \iint\limits_S A_i n_k dS.$$

Векторы $\boldsymbol{R}_i^{(S)}$ зависят от поверхности S, но их предельные значения, если они существуют, по определению предела, не зависят от вида бесконечно малой поверхности S, стягивающейся к точке M.

Имея в виду выражение (4.22) для оператора ∇, эти предельные значения мы будем обозначать через ∇A_i ($i = 1, 2, 3$). Таким образом,

$$\nabla A_i = \lim_{\tau \to 0} \boldsymbol{R}_i^{(S)} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \iint\limits_S A_i \boldsymbol{n} dS.$$

Следует, однако, помнить, что ∇A_i — три вектора, а не один, как это было в случае применения оператора ∇ к скалярной функции. В прямоугольных декартовых координатах применение оператора ∇ к трем компонентам A_i определяется следующим образом:

$$\nabla A_i = \left(\boldsymbol{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) A_i = \boldsymbol{i}_1 \frac{\partial A_i}{\partial x_1} + \boldsymbol{i}_2 \frac{\partial A_i}{\partial x_2} + \boldsymbol{i}_3 \frac{\partial A_i}{\partial x_3} = \boldsymbol{i}_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

Отсюда определяются компоненты векторов ∇A_i; например, первая компонента i-го вектора ∇A_i равна $\frac{\partial A_i}{\partial x_1}$ и т. п. Нетрудно показать, что девять величин $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$, определенных в прямоугольной декартовой системе координат, — компоненты трех векторов ∇A_i — составляют тензор 2-го ранга (см. гл. 2). Действительно,

$$\frac{\partial A'_i}{\partial x'_k} = \alpha_{i'l} \frac{\partial A_l}{\partial x'_k} = \alpha_{i'l} \frac{\partial A_l}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x'_k} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} \frac{\partial A_l}{\partial x_m}.$$

Для выяснения связи между $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ и производной вектора по направлению $\frac{d\boldsymbol{A}}{dl}$ воспользуемся тем же приемом, как и при определении проекции $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ на направление $\boldsymbol{l}$ (см. стр. 170). Выбирая в качестве поверхности (S) бесконечно малый цилиндр с образующей по орту $\boldsymbol{l}$, проектируя ∇A_i на $\boldsymbol{l}$ и производя те же вычисления, что и при определении $\boldsymbol{l} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, получим

$$\boldsymbol{l} \cdot \nabla A_i = \frac{dA_i}{dl}.$$

Эти три величины составляют вектор — производную вектора $\boldsymbol{A}$ по направлению $\boldsymbol{l}$. Ее можно записать в виде

$$\boldsymbol{l} \cdot \nabla \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{l} \cdot \nabla) \boldsymbol{A} = \frac{d\boldsymbol{A}}{dl}. \tag{4.29}$$

Используя определение ∇A_i, найдем проекции $\frac{d\boldsymbol{A}}{dl}$:

$$\frac{dA_i}{dl} = \boldsymbol{l} \cdot \nabla A_i = l_1 \frac{\partial A_i}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial A_i}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial A_i}{\partial x_3}.$$

Вспомним, что производная скаляра по направлению имеет выражение

$$\frac{d\varphi}{dl} = \boldsymbol{l} \cdot \operatorname{grad} \varphi = l_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}.$$

В скалярном поле бесконечную совокупность производных скаляра по направлению определяет вектор $\boldsymbol{i}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$ — градиент поля — он, как было сказано, является мерой неоднородности скалярного поля φ.

В векторном поле бесконечную совокупность производных вектора по направлению определяет тензор второго ранга $\nabla \boldsymbol{A}$ с компонентами $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ — его можно рассматривать как меру неоднородности векторного поля $\boldsymbol{A}$.

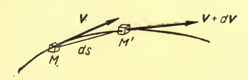


Рис. 4.19.

При перемещении частицы из M в M' ее скорость меняется как вследствие нестационарности, так и вследствие неоднородности поля скоростей

Как пример использования производной вектора по направлению рассмотрим поле ускорений движущейся жидкости. Поле скоростей $V = V(r, t)$ в общем случае неоднородное и нестационарное.

Пусть частица жидкости за dt переместилась из M в M' (рис. 4.19), получив приращение скорости dV. Приращение скорости частицы состоит (рис. 4 20) из:

1) части $dV_л$, определяемой нестационарностью поля скоростей; скорость частицы по истечении времени dt, пока частица перемещалась из M в M', изменится на

$$dV_л = \frac{\partial V}{\partial t} dt.$$

Это локальное, местное изменение скорости (рис. 4.20);

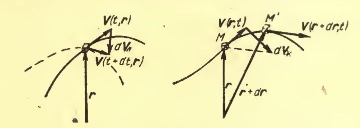


Рис. 4.20. Локальное и конвективное изменения скорости частицы жидкости

2) части dV_k, определяемой неоднородностью поля скоростей; скорость частицы при переходе из M в M' изменится на величину dV_k, которая определяется производной по направлению перемещения частицы, т. е. по направлению вектора V (вдоль траектории); это конвективное (переносное) изменение скорости равно

$$dV_k = \frac{dV}{dl} dl,$$

причем орт направления, по которому берется производная от V, равен $\frac{V}{|V|}$.

По формуле (4.29) имеем:

$$\frac{dV}{dl} = \left(\frac{V}{|V|} \cdot \nabla\right) V = \frac{1}{|V|} (V \cdot \nabla) V.$$

Так как $dl = |V| dt$, то

$$dV_k = (V \cdot \nabla) V dt.$$

Таким образом,

$$dV = dV_л + dV_k = \frac{\partial V}{\partial t} dt + (V \cdot \nabla) V dt.$$

Следовательно, поле ускорений в жидкости имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V,$$

или в компонентах

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k}. \tag{4.30}$$

4.5. Поле тензора 2-го ранга. Поток, дивергенция и производная по направлению тензорного поля

Рассмотрим поле тензора 2-го ранга $T(\boldsymbol{r})$, имеющего компоненты $T_{ik} = T_{ik}(\boldsymbol{r})$. Примерами полей тензора 2-го ранга могут служить поле тензора напряжений в упругой среде и поле моментов инерций в твердом теле.

Поток тензорного поля. Рассмотрим двустороннюю кусочно-гладкую поверхность S, помещенную в тензорное поле $T(\boldsymbol{r})$. Для каждого элемента dS этой поверхности определим положительный орт нормали.

Потоком тензорного поля через поверхность называется поверхностный интеграл, взятый от скалярного произведения тензора на вектор нормали:

$$\boldsymbol{W} = \iint\limits_S T \cdot \boldsymbol{n} dS.$$

Поток тензорного поля является ***вектором***, в отличие от потока векторного поля (4.16), являющегося скаляром. Компоненты потока тензорного поля равны

$$W_i = \iint\limits_S T_{ik} n_k dS = \iint\limits_S (T_{i1} n_1 + T_{i2} n_2 + T_{i3} n_3)\, dS. \tag{4.31}$$

Если свертывание происходит по первым индексам, то

$$W_i = \iint\limits_S T_{ki} n_k dS.$$

Укажем несколько приложений потока поля тензора 2-го ранга.

1) Пусть $T_{ik} \equiv p_{ik}$ — тензор напряжений в упругом теле. Выделим в этом теле некоторую поверхность и определим равнодействующую $\boldsymbol{P}$ всех сил напряжения, приложенных к этой поверхности (замкнутой или незамкнутой). Если $\boldsymbol{p}_n$ — напряжение у элемента dS с нормалью $\boldsymbol{n}$, то равнодействующая

$$\boldsymbol{P} = \iint\limits_S \boldsymbol{p}_n dS,$$

а ее компоненты

$$P_k = \iint\limits_S p_{nk} dS.$$

Согласно (2.7) имеем:

$$p_{nk} = p_{ik} n_i$$

Следовательно,

$$P_k = \iint\limits_S p_{ik} n_i dS.$$

Итак, поток тензора напряжений через поверхность, взятую в упругой среде, равен равнодействующей всех сил напряжений, приложенных к этой поверхности.

2) Вычислим поток единичного тензора δ_{ik} через замкнутую поверхность. Получим

$$W_i = \iint\limits_S \delta_{ik} n_k dS = \iint\limits_S n_i dS,$$

или

$$\boldsymbol{W} = \iint\limits_S \boldsymbol{n} dS.$$

Поскольку $\iint\limits_S \boldsymbol{n} dS = 0$ (см. 4.8), поток единичного тензора через замкнутую поверхность равен нулю.

Дивергенция тензорного поля. Дивергенция поля тензора 2-го ранга, как и поток этого поля, является вектором и определяется следующим пределом:

$$\overrightarrow{\operatorname{div}} \, T = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \iint\limits_S T \cdot \boldsymbol{n} dS. \tag{4.32}$$

Здесь поверхность S, ограничивающая объем τ, стягивается к рассматриваемой точке так, что ее площадь вместе с величиной объема τ стремится к нулю. Предел не зависит от вида бесконечно малой поверхности S.

Компоненты вектора $\overrightarrow{\operatorname{div}} \, T$ получаются путем дифференцирования компонент тензора T_{ik} по координатам и свертывания по тем индексам, по которым производится свертывание справа в (4.32). Таким образом,

$$(\overrightarrow{\operatorname{div}} \, T)_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \iint\limits_S T_{ik} n_k dS,$$

или

$$(\overrightarrow{\operatorname{div}} \, T)_i = \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \iint\limits_S T_{ki} n_k dS. \tag{4.33}$$

Используя выражение для оператора ∇, дивергенцию тензора второго ранга можно записать в виде

$$\overrightarrow{\operatorname{div}}\, T = \nabla \cdot T.$$

Дифференцирование тензорного поля по направлению. Отыскивая производную тензора 2-го ранга по некоторому направлению, определяемому ортом $\boldsymbol{l}$, используя результаты предыдущего параграфа, полученные при определении производной вектора по направлению, получим (ср. 4.29)

$$\frac{dT}{dl} = \boldsymbol{l} \cdot \nabla T.$$

Компоненты этого тензора в прямоугольной декартовой системе координат получим, если учесть символическую запись

$$\nabla T = \left(\boldsymbol{i}_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right) T,$$

в виде

$$\frac{dT_{ik}}{dl} = (\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{i}_m) \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m} = l_m \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}.$$

Бесконечная совокупность производных $\frac{dT_{ik}}{dl}$ тензора 2-го ранга по направлению определяется компонентами тензора 3-го ранга $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}$.

Операция, соответствующая образованию вихря векторного поля, к тензорным полям 2-го ранга не применима вообще.

4.6. Ковариантное дифференцирование тензоров. Ковариантная производная вектора. Символы Кристоффеля

Рассмотрим выражение дифференциала вектора через дифференциалы его компонент.

В декартовой системе координат имеем

$$dA = d(A_l \boldsymbol{i}_l) = \boldsymbol{i}_l dA_l.$$

Как уже отмечалось в декартовых системах координат (и только в декартовых) векторный базис *одинаков* для всех точек пространства, поэтому для любого базисного вектора $d\boldsymbol{i}_l = 0$.

Однако в случае отнесения вектора к системе обобщенных координат векторный базис ($\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$) является ***локальным***, так что каждый базисный вектор, вообще говоря, является вектор-функцией обобщенных координат (мы будем их здесь и в дальнейшем обозначать через x^1, x^2, x^3), т. е.

$$\boldsymbol{e}_l = \boldsymbol{e}_l(x^1, x^2, x^3); \quad \boldsymbol{e}^l = \boldsymbol{e}^l(x^1, x^2, x^3).$$

Вследствие этого имеем

$$\left.\begin{aligned} dA &= d\left(A_l e^l\right) = e^l dA_l + A_l de^l, \\ dA &= d\left(A^l e_l\right) = e_l dA^l + A^l de_l). \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

Таким образом, абсолютный дифференциал вектора, кроме части, отражающей изменение компонент вектора при переходе от точки к точке, содержит еще часть $A_l de^l$, $A^l de_l$, связанную с тем, что базис введенной системы координат также меняется от точки к точке.

Так как

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x^k} dx^k,$$

то на основании (4.34) частная производная вектора A по обобщенной координате x^k имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial x^k} = \frac{\partial A_l}{\partial x^k} e^l + A_l \frac{\partial e^l}{\partial x^k} = \frac{\partial A^l}{\partial x^k} e_l + A^l \frac{\partial e_l}{\partial x^k}. \tag{4.35}$$

Компоненты (ко- или контравариантные) этих векторов $\frac{\partial A}{\partial x^k}$ $(k = 1, 2, 3)$ образуют девять величин, совокупность которых называют *ковариантной* (абсолютной) *производной вектора* (ковариантного или контравариантного).

Для совокупности ковариантных компонент векторов $\frac{\partial A}{\partial x^k}$ мы введем обозначение

$$\frac{\partial A}{\partial x^k} \cdot e_l \equiv A_{l;\,k} \tag{4.36}$$

и будем называть ее *ковариантной производной ковариантного вектора.*

Совокупность контравариантных компонент векторов $\frac{\partial A}{\partial x^k}$ обозначим через $A^l_{;\,k}$, т. е.

$$\frac{\partial A}{\partial x^k} \cdot e^l \equiv A^l_{;\,k} \tag{4.37}$$

и назовем ее *ковариантной производной контравариантного вектора.*

В дальнейшем будет показано, что $A_{l;\,k}$, $A^l_{;\,k}$ являются компонентами тензора 2-го ранга.

Найдем явное выражение ковариантных производных через компоненты векторного поля.

В соответствии с определением из (4.35) получим

$$\left.\begin{aligned} A_{l;\,k} &= \frac{\partial A}{\partial x^k} \cdot e_l = \frac{\partial A_l}{\partial x^k} + A_j \frac{\partial e^j}{\partial x^k} \cdot e_l, \\ A^l_{;\,k} &= \frac{\partial A}{\partial x^k} \cdot e^l = \frac{\partial A^l}{\partial x^k} + A^j \frac{\partial e_j}{\partial x^k} \cdot e^l. \end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

Учитывая, что компоненты $g_i^{\cdot j} = e_i \cdot e^j$ равны либо нулю, либо единице, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(e_i \cdot e^j\right) = 0.$$

Отсюда, дифференцируя, имеем:

$$e_i \cdot \frac{\partial e^j}{\partial x^k} = - e^j \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k}. \qquad (4.39)$$

Введем обозначение

$$\Gamma^i_{jk} \equiv e^i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial x^k}. \qquad (4.40)$$

Эти величины (их всего 27 в трехмерном пространстве) носят название *символов Кристоффеля 2-го рода.* Тогда, в силу (4.39) и (4.40), формулы (4.38) примут вид

$$\left. \begin{aligned} A_{i;\,k} &= \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_j \Gamma^j_{ik}, \\ A^i_{;\,k} &= \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + A^j \Gamma^i_{jk}. \end{aligned} \right\} \qquad (4.41)$$

Из этих формул следует, что абсолютная (ковариантная) производная векторного поля учитывает не только быстроту изменения самого поля как такового при перемещении вдоль координатных линий $\left(\text{члены } \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \frac{\partial A^i}{\partial x^k}\right)$, но также и быстроту изменения локального базиса [вторые члены в (4.41)]. Если координатный базис не меняется от точки к точке (декартовы системы координат), то из (4.40) следует, что все символы Кристоффеля второго рода равны нулю. В этом случае ковариантные производные обращаются в наборы частных производных компонент по координатам.

Таким образом, слагаемые $-A_j \Gamma^j_{ik}$ и $+A^j \Gamma^i_{jk}$ обязаны своим происхождением исключительно введению местного, подвижного координатного базиса. Поэтому символы Кристоффеля должны выражаться через производные от компонент метрического тензора. Найдем их явное выражение.

Прежде всего заметим, что из (4.40) следует

$$e_i \Gamma^i_{jk} = \frac{\partial e_j}{\partial x^k}. \qquad (4.42)$$

Таким образом, Γ^i_{jk} являются коэффициентами разложения векторов $\frac{\partial e_j}{\partial x^k}$ по векторам *основного* базиса.

Введем символы Кристоффеля 1-го рода $\Gamma_{i,\,jk}$, являющиеся коэффициентами разложения векторов $\frac{\partial e_j}{\partial x^k}$ по векторам *взаимного* базиса, т. е.

$$e^i \Gamma_{i,\,jk} = \frac{\partial e_j}{\partial x^k}. \qquad (4.43)$$

Тогда из (4.43) и (4.42) имеем

$$\Gamma_{i,\,jk} = e_i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial x^k}, \qquad (4.44)$$

$$\Gamma_{i,\,jk} = g_{il} \Gamma^l_{jk}; \quad \Gamma^i_{jk} = g^{il} \Gamma_{l,\,jk}. \qquad (4.45)$$

Заметим теперь, что в силу (см. 2.33)

$$\frac{\partial e_j}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}\ \frac{\partial r}{\partial x^j}=\frac{\partial}{\partial x^j}\ \frac{\partial r}{\partial x^k}=\frac{\partial e_k}{\partial x^j} \tag{4.46}$$

из определений (4.40) и (4.44) следует, что *символы Кристоффеля симметричны по двум нижним индексам* (у $\Gamma_{l,\,jk}$ эти индексы отделены запятой,) т. е.

$$\Gamma_{i,\,jk}=\Gamma_{i,\,kj};\quad \Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}.$$

Тогда, учитывая симметрию $\Gamma_{l,\,jk}$ по j и k и свойство (4.46), получим

$$\Gamma_{l,\,jk}=e_i\cdot\frac{\partial e_j}{\partial x^k}=\frac{1}{2}\left(e_i\cdot\frac{\partial e_j}{\partial x^k}+e_i\cdot\frac{\partial e_k}{\partial x^j}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}(e_i\cdot e_j)+\frac{\partial}{\partial x^j}(e_i\cdot e_k)-e_j\cdot\frac{\partial e_i}{\partial x^k}-e_k\cdot\frac{\partial e_i}{\partial x^j}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-e_j\cdot\frac{\partial e_k}{\partial x^i}-e_k\cdot\frac{\partial e_j}{\partial x^i}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial}{\partial x^i}(e_k\cdot e_j)\right].$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\Gamma_{i,\,jk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right)=\Gamma_{i,\,kj}, \tag{4.47}$$

$$\Gamma^i_{jk}=g^{il}\Gamma_{l,\,jk}=\Gamma^i_{kj}. \tag{4.48}$$

Символы Кристоффеля не являются тензорами. Это следует из закона преобразования символов Кристоффеля при изменении пространственной системы координат:

$$\Gamma'_{i,\,jk}=e'_i\cdot\frac{\partial e'_j}{\partial x'^k}=\alpha^l_{i'}\,e_l\cdot\frac{\partial}{\partial x^m}(e_n\,\alpha^n_{j'})\,\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}=$$

$$=\alpha^l_{i'}\,\alpha^m_{k'}\,\alpha^n_{j'}\,e_l\cdot\frac{\partial e_n}{\partial x^m}+\alpha^l_{i'}\,\alpha^m_{k'}\,(e_l\cdot e_n)\,\frac{\partial \alpha^n_{j'}}{\partial x^m}=$$

$$=\alpha^l_{i'}\,\alpha^m_{k'}\,\alpha^n_{j'}\,\Gamma_{l,\,nm}+\alpha^l_{i'}\,\alpha^m_{k'}\,\frac{\partial \alpha^n_{j'}}{\partial x^m}\,g_{ln}. \tag{4.49}$$

Аналогично имеем

$$\Gamma'^i_{jk}=\alpha^{i'}_l\,\alpha^m_{k'}\,\alpha^n_{j'}\,\Gamma^l_{nm}+\alpha^{i'}_n\,\alpha^m_{k'}\,\frac{\partial \alpha^n_{j'}}{\partial x^m}. \tag{4.50}$$

Ковариантные производные вектора являются компонентами тензора второго ранга.

Действительно, учитывая (4.50), получим

$$A'_{i;\,k}=\frac{\partial A'_i}{\partial x'^k}-A'_j\,\Gamma'^j_{ik}=$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^m} (\alpha^l_{i'} A_l) \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} - \alpha^r_{j'} A_r \left(\alpha^{j'}_n \alpha^m_{k'} \alpha^l_{i'} \Gamma^n_{lm} + \alpha^{j'}_n \alpha^m_{k'} \frac{\partial \alpha^n_{i'}}{\partial x^m} \right) =$$

$$= \alpha^l_{i'} \alpha^m_{k'} \left\{ \frac{\partial A_l}{\partial x^m} - A_n \Gamma^n_{lm} \right\} = \alpha^l_{i'} \alpha^m_{k'} A_{l;\, m}$$

$$A'^i_{;\,k} = \frac{\partial A'^i}{\partial x'^k} + A'^j \Gamma'^i_{jk} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^m} (\alpha^{i'}_l A^l) \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} + \alpha^{j'}_r A^r \left(\alpha^{i'}_l \alpha^m_{k'} \alpha^n_{j'} \Gamma^l_{nm} + \alpha^{i'}_n \alpha^m_{k'} \frac{\partial \alpha^n_{j'}}{\partial x^m} \right) =$$

$$= \alpha^{i'}_l \alpha^m_{k'} \left\{ \frac{\partial A^l}{\partial x^m} + A^n \Gamma^l_{nm} \right\} = \alpha^{i'}_l \alpha^m_{k'} A^l_{;\, m}.$$

Здесь использовано соотношение $\alpha^{j'}_r \frac{\partial \alpha^n_{j'}}{\partial x^m} = - \alpha^n_{j'} \frac{\partial \alpha^{j'}_r}{\partial x^m}$, которое получается при дифференцировании выражения $\alpha^{j'}_r \alpha^n_{j'} = g_r^{\cdot\, n}$ (см. стр. 113).

Таким образом, величины $A_{i;\,k}$ преобразуются как ковариантные компоненты тензора второго ранга, а величины $A^l_{;\,k}$ — как смешанные компоненты.

Из определений (4.36) и (4.37), учитывая, что $e^i = g^{il} e_l$ следуют соотношения

$$A_{l;\,k} = g_{il} A^i_{;\,k}; \quad A^i_{;\,k} = g^{il} A_{l;\,k}. \tag{4.51}$$

Таким образом, и $A_{i;\,k}$ и $A^l_{;\,k}$ являются компонентами (ковариантными и смешанными) *одного и того же тензора*, который и называется *абсолютной (ковариантной) производной вектора*.

Ковариантная производная тензоров. Естественным обобщением формул для ковариантной производной вектора является определение ковариантного дифференцирования тензора 2-го ранга:

$$\left. \begin{aligned} T_{ik;\,l} &= \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^l} - T_{mk} \Gamma^m_{il} - T_{im} \Gamma^m_{kl}, \\ T^{ik}_{;\,l} &= \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^l} + T^{mk} \Gamma^i_{ml} + T^{im} \Gamma^k_{ml}, \\ T^i_{\cdot\, k;\,l} &= \frac{\partial T^i_{\cdot\, k}}{\partial x^l} + T^m_{\cdot\, k} \Gamma^i_{ml} - T^i_{\cdot\, m} \Gamma^m_{kl}. \end{aligned} \right\} \tag{4.52}$$

Можно показать, что эти величины преобразуются при изменении системы координат, как соответствующие компоненты тензора 3-го ранга ($T_{ik;\,l}$ — как ковариантные компоненты, $T^{ik}_{;\,l}$ — как смешанные — дважды контравариантные, один раз ковариантные и т. д.).

Ковариантные производные тензора любого ранга определяются аналогично: первое слагаемое — это частные производные компонент тензора по координатам; остальные слагаемые (их число равно рангу тензора) являются суммами из компонент тензора и символов Кристоффеля 1-го рода, причем индексом суммирования являются поочередно индексы компонент тензора и противоположный (верхний или нижний — в зависимости от «немого» индекса тензора) индекс символов Кристоффеля; эти последние

слагаемые входят с минусом, если «немой» индекс компонент тензора является «ковариантным» (нижним), и с плюсом — если «немой» индекс у тензора — «контравариантный» (верхний).

Например,

$$\lambda_{ik;\,m}^{\cdot\cdot\,l}=\frac{\partial\lambda_{ik}^{\cdot\cdot\,l}}{\partial x^m}-\lambda_{nk}^{\cdot\cdot\,l}\Gamma_{im}^{n}-\lambda_{in}^{\cdot\cdot\,l}\Gamma_{km}^{n}+\lambda_{ik}^{\cdot\cdot\,n}\Gamma_{nm}^{l}.$$

Ковариантная производная от тензора n-го ранга является тензором ранга $n+1$.

В частном случае тензора нулевого ранга (скаляра), его ковариантная производная совпадает с частными производными по координатам

$$f_{;\,l}=\frac{\partial f}{\partial x^l}.$$

Ковариантная производная от скаляра является ковариантным вектором (ковариантные компоненты градиента скаляра).

При таком определении операции ковариантного дифференцирования нетрудно вывести правила ковариантного дифференцирования суммы и произведения тензоров, которые совпадают с правилами обычного дифференцирования. Например, для тензора 2-го ранга имеем:

$$(A_{ik}+B_{ik})_{;\,l}=A_{ik;\,l}+B_{ik;\,l},$$

$$(A_{ik}B_{mn})_{;\,l}=A_{ik;\,l}B_{mn}+A_{ik}B_{mn;\,l}.$$

Справедливость этих формул можно показать простым вычислением правых и левых частей и сравнения результатов вычислений между собой.

Теорема Риччи: ***Ковариантная производная метрического тензора равна нулю.*** Теорема доказывается простым вычислением. Согласно (4.52) и учитывая (4.47) и (4.48) имеем:

$$g_{ik;\,l}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-g_{im}\Gamma_{kl}^{m}-g_{mk}\Gamma_{il}^{m}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\Gamma_{i,\,kl}-\Gamma_{k,\,il}=$$

$$=\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}\right)=0.$$

Отсюда, как следствие, имеем часто используемое соотношение

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}=\Gamma_{i,\,kl}+\Gamma_{k,\,il}. \qquad (4.53)$$

Аналогично можно показать, что

$$g^{ik}_{;\,l}=0.$$

Факт равенства нулю ковариантной производной от метрического тензора позволяет обращаться с его компонентами как с постоянными при ковариантном дифференцировании. Так, например, справедливы соотношения

$$g_{il}A^l_{;\,k}=(g_{il}A^l)_{;\,k}=A_{i;\,k}$$

$$g_{il}T^{lm}_{;\,k}=(g_{il}T^{lm})_{;\,k}=T_{i;\,k}^{\cdot\,m}$$

$$T_{ik;\,l}\,g^{im}g^{kn}=(T_{ik}g^{im}g^{kn})_{;\,l}=T^{mn}_{;\,l}$$

и т. п.

Однородное векторное поле. Параллельный перенос вектора. Векторное поле A называется *однородным*, если оно не меняется от точки к точке. Ковариантная производная однородного поля равна нулю.

Действительно, пусть в бесконечно близких точках x^i и $x^i + dx^i$ вектор A имеет одну и ту же величину и направление, т. е. $A(x^1, x^2, x^3) = A(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$. Однако компоненты вектора в этих точках будут, вообще говоря, различны, как различны в них и местные координатные базисы. Поэтому можно записать

$$A = A^i e_i = (A^i + dA^i)(e_i + de_i).$$

Отсюда получим

$$e_i dA^i + A^i de_i + dA^i de_i = 0$$

или, с точностью до бесконечно малых первого порядка, имеем

$$e_i dA^i + A^i de_i = dA = 0,$$

где dA — абсолютный дифференциал вектора A.

Тогда

$$\frac{\partial A}{\partial x^k} dx^k = 0$$

или

$$A^i_{;k} dx^k = 0.$$

Так как приращения dx^k — произвольны, то имеем для однородного векторного поля A:

$$A^i_{;k} = 0. \tag{4.54}$$

Можно рассматривать однородное векторное поле как результат переноса вектора A параллельно самому себе во все точки поля. Тогда об условии (4.54) говорят, как об условии *параллельного переноса вектора*.

4.7. Применение дифференциальных операций к различного вида векторным и скалярным функциям

Дифференциальные операторы в криволинейных координатах. В предыдущих параграфах были введены дифференциальные операции первого порядка над скалярами и векторами

$$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi;$$
$$\nabla \cdot A = \operatorname{div} A;$$
$$\nabla \times A = \operatorname{rot} A.$$

Применяя эти операции вторично к полученным в результате первого дифференцирования функциям, получим следующие дифференциальные операции второго порядка:

$$\nabla(\nabla \cdot A) = \operatorname{grad}\operatorname{div} A;$$
$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla^2\varphi \equiv \Delta\varphi;$$
$$\nabla \times \nabla\varphi = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0; \tag{4.55}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = \operatorname{div}\operatorname{rot} A = 0, \tag{4.56}$$
$$\nabla \times (\nabla \times A) = \operatorname{rot}\operatorname{rot} A.$$

В этих формулах символический оператор «набла» имеет выражение независимо от системы координат (ср. 4.22)

$$\nabla(\ldots) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \iint_S \boldsymbol{n}(\ldots)\, dS,$$

а в декартовой прямоугольной —

$$\nabla = \boldsymbol{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Справедливость тождеств (4.55) и (4.56) в декартовых координатах может быть проверена непосредственным вычислением.

Оператор $\nabla \cdot \nabla \equiv \Delta$ — оператор Лапласа (читается «лапласиан»). В декартовых прямоугольных координатах он имеет вид

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \boldsymbol{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \boldsymbol{i}_l \frac{\partial}{\partial x_l} = (\boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{i}_l) \frac{\partial^2}{\partial x_k \, \partial x_l} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \qquad (4.57)$$

Таким образом,

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_k} \left(= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \right).$$

Вследствие своей линейности все рассмотренные операции для суммы (разности) функций применяются к каждому слагаемому отдельно. Таким образом, имеем

$$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi;$$
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \operatorname{div} \boldsymbol{A} + \operatorname{div} \boldsymbol{B};$$
$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} + \operatorname{rot} \boldsymbol{B};$$
$$\operatorname{grad} \operatorname{div}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{B};$$
$$\Delta(\varphi + \psi) = \Delta\varphi + \Delta\psi;$$
$$\operatorname{rot} \operatorname{rot}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{B}.$$

Что касается применения дифференциальных операций к произведению функций

$$\varphi\psi; \; \varphi\boldsymbol{A}; \; \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}; \; \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}, \qquad (*)$$

то их нужно применять к каждому сомножителю отдельно, считая другой при этом постоянным. При этом очень удобно пользоваться оператором ∇, ставя его всегда после множителя, который в данном слагаемом принимается постоянным, и перед множителем, который считается переменным.

Полученные таким символическим методом, путем оперирования с «вектором» ∇, выражения, с одной стороны, не должны противоречить правилам тензорной алгебры, с дру-

гой стороны, всегда следует помнить о дифференциальном характере оператора ∇ и о том, что его применение сводится, по сути дела, к вычислению частных производных по координатам и сложению этих производных (после умножения на соответствующие орты). Таким образом, такие выражения, как $\varphi\nabla$, $\boldsymbol{A}\cdot\nabla$, $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\nabla)$ и т. п., если после них нет величины, на которую действует оператор ∇, имеют смысл только как операторы.

Поясним это применением операций ко всевозможным произведениям (*), отмечая множитель, рассматриваемый постоянным, индексом C:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \operatorname{grad}\varphi\psi=\nabla\varphi\psi=\nabla\varphi_c\psi+\nabla\varphi\psi_c=\varphi_c\nabla\psi+\psi_c\nabla\varphi=\\
&\qquad=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi;\\
&2)\ \operatorname{div}\varphi\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\varphi\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\varphi_c\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\varphi\boldsymbol{A}_c=\varphi_c\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\\
&\qquad+\boldsymbol{A}_c\cdot\nabla\varphi=\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\varphi=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\operatorname{grad}\varphi;\\
&3)\ \operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\nabla\cdot(\boldsymbol{A}_c\times\boldsymbol{B})+\\
&\qquad+\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_c)=-\boldsymbol{A}_c\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}_c(\nabla\times\boldsymbol{A})=\\
&=-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B};\\
&4)\ \operatorname{rot}\varphi\boldsymbol{A}=(\nabla\times\varphi\boldsymbol{A})=(\nabla\times\varphi_c\boldsymbol{A})+(\nabla\times\varphi\boldsymbol{A}_c)=\\
&=\varphi_c(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}_c)=\varphi(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\nabla\varphi\times\boldsymbol{A})=\\
&\qquad=\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{A}+(\operatorname{grad}\varphi\times\boldsymbol{A}).
\end{aligned}\right\}\quad(4.58)$$

Вывод следующих формул предоставляется сделать читателю (см. также задачи 13, 14 гл. 4):

$$\left.\begin{aligned}
&5)\ \operatorname{grad}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\\
&\qquad+(\boldsymbol{A}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{B}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A});\\
&6)\ \operatorname{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\operatorname{div}\boldsymbol{B}-\\
&\qquad-\boldsymbol{B}\operatorname{div}\boldsymbol{A};\\
&7)\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{A}.
\end{aligned}\right\}\quad(4.59)$$

Весьма распространенным в приложениях является случай, когда функции φ и $\boldsymbol{A}$ являются сложными функциями от $\boldsymbol{r}$, т. е.

$$\varphi=\varphi(f(\boldsymbol{r}));$$
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(f(\boldsymbol{r})),$$

где $f(\boldsymbol{r})$ — некоторая скалярная функция.

Тогда применение операций к такого рода функциям дает формулы

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad}\varphi(f(r)) &= \frac{d\varphi}{df}\operatorname{grad} f, \\ \operatorname{div} A(f(r)) &= \operatorname{grad} f\cdot\frac{dA}{df}, \\ \operatorname{rot} A(f(r)) &= \operatorname{grad} f\times\frac{dA}{df}. \end{aligned}\right\} \tag{4.60}$$

Рассмотрим доказательство, например, второй формулы. Имеем по определению

$$(\operatorname{div} A)_M = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\iint_S A\cdot n\,dS. \tag{*}$$

Разлагая под интегралом вектор A в окрестности точки M

$$A = (A)_M + \left(\frac{dA}{df}\right)_M (f - f_M) + \cdots$$

и подставляя его выражение в (*), получим, учитывая

$$\iint_S n\,dS = 0:$$

$$(\operatorname{div} A)_M = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left(\frac{dA}{df}\right)_M \iint_S f\,n\,dS = \left(\frac{dA}{df}\right)_M \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\iint_S f\,n\,dS.$$

Отсюда, вспоминая определение градиента, имеем:

$$\operatorname{div} A = \frac{dA}{df}\cdot\operatorname{grad} f.$$

Дифференциальные операторы в ортогональных криволинейных координатах. Как уже отмечалось, в практических вычислениях приходится пользоваться скалярными выражениями, являющимися разложениями соответствующих тензорных уравнений. Приведенные выше дифференциальные операции могут быть записаны в проекциях на оси координат, если известны проекции основных дифференциальных операторов (градиента и ротора).

Рассмотрим вначале выражения градиента скаляра, дивергенции вектора, ротора вектора и лапласиана в ортогональных криволинейных координатах. При этом нами будут использованы основные сведения § 2.8, касающихся ортогональных систем.

Градиент скалярной функции Φ как вектор характеризует величину и направление наибольшего изменения этой функции. Определяя проекции этого вектора на координатные

оси (производные скаляра Φ по направлению координатных осей), получим в силу (2.25) $\frac{\partial \Phi}{\partial s_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\frac{dq_i}{ds_i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$ (без суммирования по i). Следовательно,

$$\nabla \Phi = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1^0 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial \Phi}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2^0 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial \Phi}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3^0. \tag{4.61}$$

В цилиндрической системе координат

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial R}\boldsymbol{e}_R^0 + \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi^0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_z^0.$$

Через $\boldsymbol{e}^0$ с соответствующим индексом обозначен орт координатной оси.

Для определения выражения $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ в криволинейных координатах воспользуемся определением

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \lim_{\tau \to 0}\frac{1}{\tau}\iint \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A}\, dS.$$

Элементарный объем $d\tau$ (в предыдущем выражении он обозначен через τ) имеет выражение

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3\, dq_1 dq_2 dq_3.$$

Рис. 4.21. Вычисление потока вектора через поверхность элементарного объема в криволинейных координатах

Для определения интеграла $\iint\limits_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A}\, dS$ найдем сначала поток вектора $\boldsymbol{A}$ через пару противоположных граней, например через грани, перпендикулярные (q_1) (рис. 4.25).

На грани M 3 4 5 нормаль $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_1^0$ и поэтому поток вектора через нее будет равен

$$-\boldsymbol{e}_1^0 \cdot \boldsymbol{A} ds_3 ds_2 = -A_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3. \tag{4.62}$$

Здесь через A_1 обозначена проекция вектора на ось (q_1), т. е.

$$A_1 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_1^0.$$

На грани 1 2 7 6 выражение (4.62) получит приращение, связанное с приращением координаты q_1 на величину dq_1, и так как направление нормали будет $\boldsymbol{e}_1^0$, то поток вектора $\boldsymbol{A}$ через эту грань равен

$$\left(A_1H_2H_3 + \frac{\partial (A_1H_2H_3)}{\partial q_1} dq_1\right) dq_2dq_3.$$

Определяя таким же образом поток через пары других граней и складывая все полученные выражения, найдем, разделив их на элементарный объем.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A_2H_1H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3H_1H_2)\right]. \tag{4.63}$$

Для цилиндрической системы координат

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(A_R R) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + R\frac{\partial A_z}{\partial z}\right].$$

Таким же самым образом, пользуясь определением вектора вихря

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \iint\limits_S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A})\, dS,$$

найдем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1^0 \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(A_2H_2)\right] + \boldsymbol{e}_2^0 \frac{1}{H_1H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(A_3H_3)\right] + \boldsymbol{e}_3^0 \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left\{(A_2H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(A_1H_1)\right\}\right]. \tag{4.64}$$

Для цилиндрической системы координат

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_R^0 + \left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right)\boldsymbol{e}_\varphi^0 + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial R}(A_\varphi R) - \frac{\partial A_R}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z^0.$$

Для определения лапласиана скалярной функции заметим, что

$$\Delta\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi.$$

Применяя поэтому найденные выше выражения для div $\boldsymbol{A}$ и grad Ф, найдем

$$\Delta\Phi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\right)\right]. \quad (4.65)$$

В цилиндрической системе координат

$$\Delta\Phi = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

При определении проекции вектора $\Delta\boldsymbol{A}$ на оси криволинейной системы координат необходимо использовать выражение, которое годится для любой системы координат:

$$\Delta\boldsymbol{A} = \text{grad div}\,\boldsymbol{A} - \text{rot rot}\,\boldsymbol{A}. \quad (4.65,\text{а})$$

Оператор Δ, примененный к скалярной функции, в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}R\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.66)$$

Проекции вектора $\Delta\boldsymbol{A}$ на оси цилиндрической системы координат равны:

$$(\Delta\boldsymbol{A})_R = \Delta A_R - \frac{A_R}{R^2} - \frac{2}{R^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi};$$

$$(\Delta\boldsymbol{A})_\varphi = \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{R^2} + \frac{2}{R^2}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi};$$

$$(\Delta\boldsymbol{A})_z = \Delta A_z.$$

Здесь оператор Δ определяется выражением (4.66), а проекция вектора $\Delta\boldsymbol{A}$ вычислены на основании формулы (4.65, а).

Приведем выражение основных дифференциальных операций в сферической системе координат R, θ, φ (рис. 2.13). Координатными поверхностями служат полуплоскость, проходящая под углом φ через ось (x_3), сфера радиуса R и конус с углом раствора 2θ.

В этой системе имеем:

$$ds^2 = dR^2 + R^2d\theta^2 + R^2\sin^2\theta\,d\varphi^2;$$

$$\nabla\Phi = \boldsymbol{e}_R^0\frac{\partial\Phi}{\partial R} + \boldsymbol{e}_\theta^0\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\varphi^0\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi};$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2A_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi};$$

$$\text{rot}_R\boldsymbol{A} = \frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right];$$

$$\mathrm{rot}_\theta \boldsymbol{A} = \frac{1}{R \sin\theta} \frac{dA_R}{\partial\varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(RA_\varphi);$$

$$\mathrm{rot}_\varphi \boldsymbol{A} = \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(A_\theta R) - \frac{\partial A_R}{\partial\theta}\right];$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 \sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right].$$

В сферических координатах оператор Δ, применяемый к скаляру, имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \quad (4.67)$$

Проекции вектора $\Delta\boldsymbol{A}$ на оси сферической системы координат имеют вид:

$$(\Delta\boldsymbol{A})_R = \Delta A_R - \frac{2A_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{2A_\theta}{R^2} \mathrm{ctg}\,\theta - \frac{2}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi};$$

$$(\Delta\boldsymbol{A})_\theta = \Delta A_\theta + \frac{2}{R^2} \frac{\partial A_R}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{R^2 \sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi};$$

$$(\Delta\boldsymbol{A})_\varphi = \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{R^2 \sin^2\theta} + \frac{2}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial A_R}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}.$$

Эти проекции вычислены на основании формулы

$$\Delta\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}.$$

Дифференциальные операторы в общих криволинейных координатах. Понятия ко-, контравариантных и физических компонент тензоров, а также правила ковариантного дифференцирования позволяют получить выражения дифференциальных операторов в произвольных криволинейных координатах.

Градиент скаляра $\Phi(x^1, x^2, x^3)$ определяется как вектор, ковариантные компоненты которого равны $\frac{\partial\Phi}{\partial x^l}$ (x^l — обобщенные криволинейные координаты). Тогда в произвольных системах координат можно ввести оператор «набла» ∇

$$\nabla \equiv e^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad (4.68)$$

так что

$$\nabla\Phi = e^l \frac{\partial\Phi}{\partial x^l}. \quad (4.69)$$

Ковариантные компоненты вектора $\nabla\Phi$ равны $\frac{\partial\Phi}{\partial x^l}$, а «физические» компоненты в силу (1.36)

$$(\nabla\Phi)^* = \frac{1}{\sqrt{g_{ll}}} \frac{\partial\Phi}{\partial x^l} \quad \text{(нет суммирования по «}l\text{»)} \quad (4.70).$$

В случае ортогональных координат отсюда получаем

$$(\nabla\Phi)_i^* = \frac{1}{H_i} \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}.$$

Все свойства градиента, установленные в 4.4, остаются в силе и нет нужды их переформулировать в системе обобщенных координат. Заметим только, что если $\Phi = \Phi(x^1, x^2, x^3)$, то и в случае самых общих координат:

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} dx^i = \nabla\Phi \cdot d\boldsymbol{r}, \quad \text{где } d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_i dx^i.$$

Дивергенция вектора определяется как свертка тензора второго ранга — ковариантной производной контравариантного вектора (линейный инвариант тензора ковариантной производной):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = A^i_{;\,i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^j \Gamma^i_{ij}.$$

Найдем выражение суммы Γ^i_{ij} через компоненты метрического тензора. Учитывая (4.45) и симметрию g^{ik}, пишем:

$$\Gamma^i_{ij} = g^{ik} \Gamma_{k;\,ij} = \frac{1}{2} g^{ik} (\Gamma_{k,\,ij} + \Gamma_{i,\,kj}), \tag{4.71}$$

причем, по теореме Риччи (см. 4.53)

$$\Gamma_{k,\,ij} + \Gamma_{i,\,kj} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}. \tag{4.72}$$

Разлагая по известной теореме из алгебры определитель $G = \det \| g_{ik} \|$ по элементам i-й строки, получим

$$G = g_{ik} G^{ik} \qquad \text{(по } i \text{ не суммировать!)},$$

где G^{ik} — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу g_{ik}.
Отсюда, поскольку G^{ik} не зависит от g_{ik}:

$$\frac{\partial G}{\partial g_{ik}} = G^{ik}.$$

Но, в силу (1.44)

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{G} = \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial g_{ik}}. \tag{4.73}$$

Поэтому, учитывая (4.71), (4.72) и (4.73),

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2} \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial g_{ik}} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^j},$$

и, следовательно,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^i \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} (A^i \sqrt{G}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{ik} A_k \sqrt{G}) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{A_i^*}{\sqrt{g_{ii}}} \sqrt{G} \right), \tag{4.74}$$

где A_i^* — физические компоненты вектора $\boldsymbol{A}$.

В случае ортогональных координат,

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{A_i^* \; H_1H_2H_3}{H_i} \right).$$

Лапласиан скалярной функции можно получить из выражения $\Delta\Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi$. Учитывая (4.69) и (4.74), имеем:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ik} \sqrt{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \right). \tag{4.75}$$

В случае ортогональных координат,

$$\Delta\Phi = \frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right) \tag{4.76}$$

Ротор вектора может быть определен как векторное произведение вектора $\nabla = e^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ на вектор A. Учитывая это замечание и результаты главы первой, получим

$$\operatorname{rot} A = \nabla \times A = e^i \frac{\partial}{\partial x^i} \times A_k e^k = (e^i \times e^k) \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{e_j}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right),$$

где индексы (j, i, k) составляют циклическую перестановку чисел (1, 2, 3).

Отсюда получаем контравариантные и «физические» компоненты вектора rot A:

$$(\operatorname{rot} A)_j = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right),$$

$$(\operatorname{rot} A)_j^* = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{G}} \left[\frac{\partial (A_k^* \sqrt{g_{kk}})}{\partial x^i} - \frac{\partial (A_i^* \sqrt{g_{ii}})}{\partial x^k} \right]$$

(нет суммирования по i и k!)

В случае ортогональных координат имеем

$$(\operatorname{rot} A)_j = \frac{H_j}{H_1H_2H_3} \left[\frac{\partial (A_k H_k)}{\partial x_i} - \frac{\partial (A_i H_i)}{\partial x_k} \right] \tag{4.77}$$

(нет суммирования по i и k!)

4.8. Интегральные теоремы векторного и тензорного анализа

Интегральные теоремы устанавливают важные соотношения между значениями тензоров внутри поля и их значениями

на границах поля. Они являются обобщением известной формулы Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b \frac{dA(x)}{dx}\, dx = A(b) - A(a),$$

выражающей интеграл от производной функции через значения этой функции на границах области (в предположении существования и непрерывности производной).

В 4.3 мы уже останавливались на двух важнейших интегральных теоремах векторного анализа — теореме Остроградского и теореме Стокса. Их векторные формулировки имеют вид

$$\iiint_\tau \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, d\tau = \iint_S \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n} dS; \tag{4.78}$$

$$\iint_S \boldsymbol{n}\cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{A} d\tau = \oint_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{L}. \tag{4.79}$$

Эти теоремы имеют принципиально важное значение в тензорном анализе. Они имеют широкое применение во многих разделах теоретической физики, особенно в гидромеханике, теории упругости и электродинамике. Ниже мы приведем несколько примеров использования этих теорем.

Формулы, выражающие теоремы Остроградского и Стокса, позволяют непосредственно сформулировать при специальном задании поля $\boldsymbol{A}$ ряд дополнительных теорем, примыкающих к теоремам Остроградского и Стокса.

Теоремы, примыкающие к теореме Остроградского. Из формулы Остроградского можно получить ряд интегральных формул, связывающих характеристики поля на некоторой замкнутой поверхности с характеристиками поля в объеме, ограниченном этой поверхностью. Все ограничения, накладываемые на поле, подчиняющееся теореме Остроградского, переносятся с соответствующими изменениями в получаемые формулы.

Положим последовательно в (4.78):

1) $\boldsymbol{A} = \varphi \boldsymbol{C}$;
2) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$;
3) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\cdot T \ (A_i = C_k T_{ik})$,

где $\boldsymbol{C}$ — постоянный произвольный вектор.

Тогда получим последовательно

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{C}\cdot\varphi\boldsymbol{n}, && \operatorname{div}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\cdot\nabla\varphi;\\ &2)\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}), && \operatorname{div}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B};\\ &3)\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{C}\cdot(T\cdot\boldsymbol{n}), && \operatorname{div}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\cdot\overrightarrow{\operatorname{div}}\, T. \end{aligned}\right\} \tag{4.80}$$

Поскольку вектор C предполагается постоянным и произвольным, то получим*, подставляя последовательно выражения (4.80) в (4.78):

$$\iint_S \varphi \boldsymbol{n} dS = \iiint_\tau \nabla\varphi d\tau; \qquad (4.81)$$

$$\iint_S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A}) dS = \iiint_\tau \operatorname{rot} \boldsymbol{A} d\tau; \qquad (4.82)$$

$$\iint_S T\cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_\tau \overrightarrow{\operatorname{div}}\, T d\tau; \qquad (4.83)$$

или

$$\iint_S T_{ik} n_k dS = \iiint_\tau \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} d\tau .$$

Все эти формулы можно записать сокращенно в виде равнозначности действия двух операторов на одну и ту же величину (...):

$$\iint_S \boldsymbol{n} (...)\, dS = \iiint_\tau \nabla (...)\, d\tau.$$

Эти операторы применяются к скаляру, вектору (скалярным и векторным умножением) и тензору 2-го ранга.

Рассмотрим несколько частных видов формул (4.81), (4.82), (4.83).

1. Если поле $\boldsymbol{A}$ таково, что $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$ всюду в области τ, то из (4.78) следует равенство нулю потока поля через любую замкнутую поверхность:

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n} dS = 0.$$

2. Если внутри области τ дивергенция поля равна нулю всюду, кроме некоторой точки (где дивергенция либо не существует, либо отлична от нуля), то поток поля не зависит от вида поверхности S и будет одинаковым для всех поверхностей, охватывающих эту точку, и равным нулю для всех

* Мы получим выражение вида $C\cdot\left\{\iint_S \dots dS - \iiint_\tau \dots d\tau\right\} = 0.$

Поскольку C — произвольный вектор, то из равенства нулю написанного скалярного произведения следует:

$$\iint_S \dots dS - \iiint_\tau \dots d\tau = 0.$$

поверхностей, не содержащих внутри себя этой точки (ср. пример 3 на стр. 167).

3. Беря $\varphi = \text{const}$, получим из (4.81)

$$\iint\limits_S n\,dS = 0$$

для любой замкнутой поверхности S.

4. Если поле $\boldsymbol{A}$ таково, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$ всюду внутри области τ, то из (4.82) следует:

$$\iint\limits_S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A})\,dS = 0.$$

Теоремы, примыкающие к теореме Стокса. Из теоремы Стокса можно получить ряд формул, связывающих характеристики поля на некоторой незамкнутой поверхности с данными того же поля на контуре, который служит границей этой поверхности.

Ввиду важности теоремы Стокса мы приведем еще одно ее доказательство, менее строгое, но более наглядное.

Рассмотрим замкнутый контур L, стягивающий произвольную поверхность S (рис. 4.22).

Предположим, что во всех точках этой поверхности заданы и непрерывны компоненты вектора $\boldsymbol{A}$ вместе с их частными производными $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$.

Разобьем поверхность S на N достаточно малых частей S_i, ограниченных замкнутыми контурами L_i.

На каждом из элементов S_i возьмем внешнюю нормаль $\boldsymbol{n}_i$ и установим направление обхода контура L_i, соответственно направлению $\boldsymbol{n}_i$.

Тогда для какой-то точки M_i из S_i согласно (4.26) мы можем определить проекцию вектора вихря:

$$(\boldsymbol{n}_i \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{A})_{M_i} = \lim_{S_i \to 0} \frac{1}{S_i} \oint\limits_{L_i} \boldsymbol{A}_i \cdot d\boldsymbol{L}_i.$$

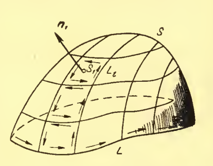


Рис. 4.22. Участки S_i поверхности S, имеющей границу в виде контура имеют общие части контуров L_i, которые обходятся дважды в противоположных направлениях

Отсюда

$$(\boldsymbol{n}_i \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{A})_{M_i} S_i = \oint\limits_{L_i} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{L}_i + \varepsilon S_i,$$

где ε может быть сделана сколь угодно малой по абсолютной величине путем уменьшения диаметра ячейки S_i. Принимая, что здесь имеет место равномерная сходимость, найдем для любого $\varepsilon > 0$ такое разбиение S на N частей, при котором $\max \{\varepsilon_i\} \leqslant \varepsilon$.

Тогда получим, суммируя по всем ячейкам S_i:

$$\left| \sum_{i=1}^{N} (n_i \cdot \operatorname{rot} A)_{M_i} S_i - \sum_{i=1}^{N} \oint_{L_i} A \cdot dL_i \right| \leqslant \varepsilon \tag{4.84}$$

где $\varepsilon \longrightarrow 0$, тогда $N \longrightarrow \infty$.
Но

$$\sum_{i=1}^{N} \oint_{L_i} A \cdot dL_i = \oint_{L} A \cdot dL,$$

ибо в этой сумме интегралы, не относящиеся к границе поверхности S — контуру L, попарно взаимно уничтожаются. Это вызвано тем, что контуры, разграничивающие ячейки S_i, обходятся дважды в противоположных направлениях.

Тогда, увеличивая число N до бесконечности и уменьшая S_i до нуля, получим, заменяя сумму в левой части выражения (4.84) поверхностным интегралом:

$$\iint_S n \cdot \operatorname{rot} A dS = \oint_L A \cdot dL.$$

Теорема Стокса доказана.

Теперь рассмотрим ряд интегральных формул, получаемых из основной (4.79) определенным выбором вектора A.

Положим последовательно:

1) $A = \varphi C$,

2) $A = B \times C$,

где C — постоянный произвольный вектор.

Тогда получим:

1) $n \cdot \operatorname{rot} A = n \cdot \operatorname{rot} (\varphi C) = C \cdot (n \times \nabla\varphi)$; $A \cdot dL = C \cdot \varphi dL$;

2) $n \cdot \operatorname{rot} A = n \cdot \operatorname{rot} (B \times C) = ((n \times \nabla) \times B) \cdot C$;
$A \cdot dL = (B \times C) \cdot dL = (dL \times B) \cdot C$.

Подставляя эти значения $n \cdot \operatorname{rot} A$ и AdL в (4.79) и сокращая полученные выражения на произвольный постоянный вектор C, получим следующие формулы:

$$\iint_S (n \times \nabla\varphi) dS = \oint_L \varphi dL; \tag{4.85}$$

$$\iint_S ((n \times \nabla) \times A) dS = \oint_L (dL \times A). \tag{4.86}$$

Заметим, что формулу Стокса (4.79) можно переписать, введя оператор ∇ в виде

$$\iint_S dS(\boldsymbol{n}\times\nabla)\cdot\boldsymbol{A}=\oint_L d\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A}. \qquad (4.86')$$

Формулы (4.78), (4.85), (4.86) можно объединить в одну символическую формулу, определяющую действия разных операторов на одно и то же выражение (...):

$$\iint_S (\boldsymbol{n}\times\nabla)(\ldots)\,dS=\oint_L(\ldots)\,d\boldsymbol{L}.$$

Выражение (...) может быть скаляром (см. 4.85) или вектором, на который оператор действует скалярно (см. 4.79) или векторно (см. 4.86).

Отметим некоторые следствия из теоремы Стокса.

1) Поток вихря непрерывного поля через *замкнутую* поверхность равен нулю. Доказательство этого следует из факта произвольности поверхности S, имеющей границу в виде контура L.

2. В односвязном поле, если $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=0$ всюду, циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.

Формулы Грина. Известные в анализе формулы Грина могут быть получены как следствие из теоремы Остроградского. Ввиду их важности мы рассмотрим эти формулы особо. Возьмем в (4.78) вектор $\boldsymbol{A}$ в виде

$$\boldsymbol{A}=\varphi\nabla\psi,$$

где φ, ψ — скалярные функции, непрерывные вместе со своими частными производными 1-го и 2-го порядков.

Тогда имеем:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\operatorname{div}(\varphi\nabla\psi)=\varphi\Delta\psi+\nabla\varphi\cdot\nabla\psi;$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}=\varphi\boldsymbol{n}\cdot\nabla\psi=\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}.$$

Подставляя эти выражения в формулу Остроградского, получим

$$\iiint_\tau(\varphi\Delta\psi+\nabla\varphi\cdot\nabla\psi)\,d\tau=\iint_S\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dS. \qquad (4.87)$$

Это *первая формула Грина.*

Положим в формуле Остроградского

$$\boldsymbol{A}=\varphi\nabla\psi-\psi\nabla\varphi.$$

Тогда получим ***вторую формулу Грина***

$$\iiint\limits_{\tau}(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)\,d\tau=\iint\limits_{S}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\,dS. \qquad (4.88)$$

Из этих основных формул следуют при частных значениях φ и ψ некоторые важные соотношения.

В случае $\varphi=\psi$ формула (4.87) дает

$$\iiint\limits_{\tau}[\varphi\Delta\varphi+(\nabla\varphi)^2]\,d\tau=\iint\limits_{S}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS. \qquad (4.89)$$

В случае $\varphi=\text{const}$ формула (4.87) дает

$$\iiint\limits_{\tau}\Delta\psi d\tau=\iint\limits_{S}\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dS. \qquad (4.90)$$

Из формулы (4.90) следует, что оператор $\Delta\equiv\nabla\cdot\nabla$ может быть представлен в виде следующего передела:

$$\Delta(\ldots)=\lim_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}\iint\limits_{S}\frac{\partial}{\partial n}(\ldots)\,dS. \qquad (4.91)$$

Следствие. Вторая формула Грина имеет одно важное следствие, к выводу которого мы переходим.

Пусть в объеме τ, ограниченном поверхностью S, задана непрерывная вместе со вторыми частными производными функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$.

Тогда можно определить значение φ в любой внутренней точке $M_0(x_{10}, x_{20}, x_{30})$ объема τ, если известны значения φ и ее нормальной производной $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на границе этого объема и значение $\Delta\varphi$ в каждой его внутренней точке.

Пусть $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, проведенный из M_0 в переменную точку M.

Тогда

$$r=\sqrt{(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2}.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что функция $\frac{1}{r}$ удовлетворяет условию $\Delta\frac{1}{r}=0$ во всех точках τ, кроме точки M_0, где $r=0$.

Окружим точку M_0 сферой с поверхностью ε радиуса ρ (см. рис. 4.23). Тогда для области (τ') вне сферы, согласно второй формуле Грина (4.88), имеем, положив $\psi = \frac{1}{r}$:

$$\iiint\limits_{\tau'} \left(-\frac{1}{r} \Delta\varphi \right) d\tau = \iint\limits_{S} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS + \\ + \iint\limits_{\varepsilon} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) d\varepsilon. \qquad (4.92)$$

Здесь τ' — область τ за вычетом области сферы, исключающей точку M_0, т. е. $\tau' = \tau - \tau_\varepsilon$.

Поскольку внешняя для сферы ε (внутренняя для поверхности области τ') нормаль совпадает с направлением радиуса $\boldsymbol{r}$, получим

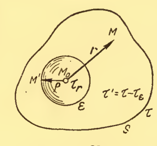


Рис. 4.23.
Выделение особой точки M_0

$$\iint\limits_{\varepsilon} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) d\varepsilon = \\ = \iint\limits_{\varepsilon} \left(-\varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) d\varepsilon = \\ = \iint\limits_{\varepsilon} \left(\frac{\varphi}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) d\varepsilon. \qquad (4.93)$$

Вычислим предел этого выражения, когда $\rho \to 0$, т. е. когда сфера ε стягивается к точке M_0. Имеем:

$$\lim_{\rho \to 0} \iint\limits_{\varepsilon} \left(\frac{\varphi}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) d\varepsilon = \\ = \lim_{\substack{\rho \to 0 \\ M' \to M_0}} \left[\frac{\varphi(M')}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_{M'} \right] 4\pi\rho^2 = 4\pi\varphi(M_0).$$

Тогда из выражения (4.92) имеем:

$$4\pi\varphi(M_0) = -\iiint\limits_{\tau} \frac{1}{r} \Delta\varphi d\tau - \\ - \iint\limits_{S} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS. \qquad (4.94)$$

Эта формула доказывает сформулированное выше следствие из теоремы Грина.

Аналогичное следствие, касающееся выражения значения некоторого вектора $\boldsymbol{A}$ во внутренней точке объема τ через $\Delta\boldsymbol{A}$ для внутренних точек и производную $\boldsymbol{A}$ по направлению $\boldsymbol{n}$ для точек поверхности S, можно получить, если воспользоваться формулой (4.83):

$$\iiint\limits_{\tau} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\,d\tau = \iint\limits_{S} T_{ik}n_k dS.$$

Положим в этом выражении

$$T_{ik} = A_i \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

Тогда, повторяя рассуждения, приведшие к формуле (4.94) для скаляра φ, получим для непрерывного в объеме вместе с двумя первыми частными производными вектора $\boldsymbol{A}$:

$$4\pi A_i(M_0) = -\iiint\limits_{\tau} \frac{1}{r}\,\Delta A_i d\tau - \\ -\iint\limits_{S}\left(A_i \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right) n_k dS,$$

или

$$4\pi \boldsymbol{A}(M_0) = -\iiint\limits_{\tau} \frac{1}{r}\,\Delta \boldsymbol{A} d\tau - \\ -\iint\limits_{S}\left\{\boldsymbol{A}\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\,(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A}\right\} dS.$$

Здесь вектор $\Delta\boldsymbol{A}$ может быть выражен по формуле (4.65а).

Примеры

Теоремы векторного и тензорного анализа находят широкое применение в механике сплошных сред. Рассмотрим некоторые характерные примеры использования интегральных теорем тензорного анализа.

Пример 1. *Дифференциальные уравнения движения сплошной среды. Уравнения движения жидкости.*

В движущейся сплошной среде выделим ее часть, имеющую объем τ, ограниченный поверхностью S. При движении среды объем τ и поверхность S вообще меняются, но масса остается постоянной, так что $\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\tau}\rho d\tau = 0$. К выделенной части среды применим второй закон Ньютона, подсчитав количество движения и все приложенные силы.

Количество движения (импульс) выделенной части равно

$$\iiint\limits_{\tau} \rho V d\tau.$$

Если на каждую единицу массы действует сила f, то главный вектор всех массовых сил, приложенных к выделенной части среды, равен

$$\iiint\limits_{\tau} f\rho d\tau.$$

Здесь f — интенсивность массовых сил (в поле тяжести $f = g$ — ускорению силы тяжести).

К поверхности рассматриваемой части среды приложены еще поверхностные силы, напряжение которых на элементе поверхности dS с внешней нормалью n равно p_n. Тогда главный вектор поверхностных сил, приложенных к этой части среды, равен

$$\iint\limits_{S} p_n dS,$$

и уравнение движения ее имеет вид

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\tau} \rho V d\tau = \iiint\limits_{\tau} \rho f d\tau + \iint\limits_{S} p_n dS.$$

Поскольку масса любого объема $\Delta\tau$ в силу уравнения неразрывности остается постоянной, то $\frac{d}{dt}(\rho\Delta\tau) = 0$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\tau} \rho V d\tau = \iiint\limits_{\tau} \rho \frac{dV}{dt} d\tau.$$

Таким образом,

$$\iiint\limits_{\tau} \rho \frac{dV}{dt} d\tau = \iiint\limits_{\tau} f\rho d\tau + \iint\limits_{S} p_n dS.$$

Учитывая полученное ранее выражение для p_n, получим

$$\iiint\limits_{\tau} \tau \frac{dV}{dt} d\tau = \iiint\limits_{\tau} \rho f d\tau + \iint\limits_{S} p_k n_k dS, \qquad (4.95)$$

или в компонентах ($i = 1, 2, 3$)

$$\iiint\limits_{\tau} \rho \frac{dV_i}{dt} d\tau = \iiint\limits_{\tau} \rho f_i d\tau + \iint\limits_{S} p_{ik} n_k dS,$$

где p_{ik} — тензор напряжений.

Чтобы получить дифференциальные уравнения движения сплошной среды, преобразуем поверхностный интеграл в объемный; согласно теореме Остроградского (см. 4.83), получим:

$$\iint\limits_{S} p_{ik} n_k dS = \iiint\limits_{\tau} \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} d\tau.$$

Тогда

$$\iiint\limits_{\tau}\left\{\rho\frac{dV_i}{dt}-\rho f_i-\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\right\}d\tau=0.$$

Поскольку объем τ произвольный, то в предположении непрерывности подынтегрального выражения получим

$$\rho\frac{dV_i}{dt}=\rho f_i+\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}.$$

Здесь $\frac{dV_i}{dt}$ — полная производная, которая, как было показано в (4.30), выражается в виде:

$$\frac{dV_i}{dt}=\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k}.$$

Таким образом, окончательно дифференциальные уравнения (их всего три для $i=1, 2, 3$) движения сплошной среды имеют вид

$$\rho\frac{\partial V_i}{\partial t}+\rho V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k}=\rho f_i+\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \quad (4.96)$$

Предметом гидроаэромеханики является изучение движения жидкостей и газов. Для этого класса сплошных сред обычно принимается линейная зависимость между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций (см. задачу 4, гл. 2) с выделением шарового тензора, отвечающего гидростатическому давлению. Таким образом, в гидромеханике считают, что выполняется следующее основное соотношение:

$$p_{ik}=-p\delta_{ik}+aV_{ik}+b\delta_{ik}V_{ll}.$$

Здесь: p — гидростатическое давление (скаляр), a и b — коэффициенты пропорциональности: $V_{ll}=\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\equiv\frac{\partial V_1}{\partial x_1}+\frac{\partial V_2}{\partial x_2}+\frac{\partial V_3}{\partial x_3}$ — свертка тензора скоростей деформаций, которая, очевидно, равна дивергенции скорости ($V_{ll}=\operatorname{div} V$).

Обычно в гидромеханике это соотношение (иногда его называют обобщенной гипотезой Ньютона) записывают в виде

$$p_{ik}=-p\delta_{ik}+2\mu V_{ik}-\frac{2}{3}\mu\delta_{ik}V_{ll},$$

так что

$$p_{11}+p_{22}+p_{33}=-3p,$$

где μ — коэффициент вязкости жидкости (коэффициент так называемой второй вязкости принят равным нулю*).

В случае несжимаемой жидкости имеем ($\operatorname{div} V=0$):

$$p_{ik}=-p\delta_{ik}+2\mu V_{ik},$$

а в случае жидкости, находящейся в покое и в случае идеальной жидкости (лишенной трения), имеем:

$$p_{ik}=-p\delta_{ik}.$$

* Подробнее см. Л. Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа, ГИТТЛ, 1957, стр. 463—466.

Подставляя различные выражения для p_{ik} в уравнения (4.96), получим уравнения движения:

а) идеальной жидкости —

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

или в векторной записи

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) V = \rho f - \nabla p; \tag{4.97}$$

б) вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье — Стокса) (при $\mu = \text{const}$) —

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_k},$$

или в векторной записи

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) V = \rho f - \nabla p + \mu \Delta V \tag{4.98}$$

$\left(\text{здесь учтено, что } \operatorname{div} V = \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0\right)$;

в) вязкой сжимаемой жидкости (при $\mu = \text{const}$) —

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_k},$$

или в векторной записи

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) V = \rho f - \nabla p + \mu \Delta V + \frac{1}{3} \mu \nabla \operatorname{div} V.$$

В случае обобщенных координат уравнение движения должно быть сформулировано относительно компонент векторов.

Пусть поле скоростей есть функция времени t и обобщенных координат x^1, x^2, x^3, т. е. $V = V(x^1, x^2, x^3, t)$. Тогда приращение скорости частицы жидкости при перемещении из точки с координатами x^i в точку $x^i + dx^i$ равно

$$dV = dV_{\text{лок}} + dV_{\text{конв}},$$

где $dV_{\text{лок}} = \frac{\partial V}{\partial t} dt$ — локальная часть изменения скорости,

а $dV_{\text{конв}} = \frac{\partial V}{\partial x^k} dx^k$ — конвективная часть изменения скорости, т. е.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x^k} V^k.$$

Здесь $V^k = \frac{dx^k}{dt}$ — контравариантные компоненты скорости.

Отсюда, учитывая определение ковариантной производной (4.37), получим контравариантные компоненты ускорения

$$\frac{dV}{dt} \cdot e^i = \left(\frac{dV}{dt}\right)^i = \frac{\partial V}{\partial t} \cdot e^i + \frac{\partial V}{\partial x^k} \cdot e^i V^k = \frac{\partial V^i}{\partial t} + V^k V^i_{;k}. \tag{4.99}$$

Таким образом, в случае обобщенных координат вместо (4.96) получим

$$\rho \frac{\partial V^i}{\partial t} + \rho V^k V^i_{;\,k} = \rho f^i + p^{ik}_{;\,k}, \tag{4.100}$$

где $p^{ik}_{;\,k}$ — свертка ковариантной производной тензора напряжений.

В случае вязкой жидкости имеем

$$p^{ik} = -pg^{ik} + 2\mu V^{ik} - \frac{2}{3}\mu g^{ik} V^l_{;\,l}, \tag{4.101}$$

где компоненты тензора скоростей деформации имеют выражение

$$V^{ik} = g^{il} g^{km} V_{lm} = g^{il} g^{km} \frac{1}{2}(V_{l;\,m} + V_{m;\,l}). \tag{4.102}$$

При этом $V^l_{;\,l}$ — дивергенция вектора скорости.

Вычислим $p^{ik}_{;\,k}$ — дивергенцию тензора напряжений.

Учитывая, что ковариантная производная от метрического тензора равна нулю, получим

$$p^{ik}_{;\,k} = -p_{;\,k} g^{ik} + 2\mu V^{ik}_{;\,k} - \frac{2}{3}\mu g^{ik} (V^l_{;\,l})_{;\,k}.$$

Но

$$V^{ik}_{;\,k} = g^{il} g^{km} \frac{1}{2}[(V_{l;\,m})_{;\,k} + (V_{m;\,l})_{;\,k}] =$$

$$= \frac{1}{2} g^{km} (V^i_{;\,m})_{;\,k} + \frac{1}{2} g^{il} (V^k_{;\,l})_{;\,k}.$$

Предполагая $\frac{\partial^2 V^i}{\partial x^k dx^l} = \frac{\partial^2 V^i}{\partial x^l \partial x^k}$, получим $(V^k_{;\,l})_{;\,k} = (V^k_{;\,k})_{;\,l}$. Теперь подставляя $p^{ik}_{;\,k}$ в (4.100), можно записать уравнение Навье — Стокса в обобщенных координатах в виде

$$\rho \frac{\partial V^i}{\partial t} + \rho V^k V^i_{;\,k} = \rho f^i - g^{ik}\frac{\partial p}{\partial x^k} + \frac{1}{3}\mu g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}(V^l_{;\,l}) + \mu g^{km}(V^i_{;\,m})_{;\,k}. \tag{4.103}$$

Или, переходя к ковариантным компонентам:

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V^k V_{i;\,k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x^i}(V^l_{;\,l}) + \mu g^{km}(V_{i;\,m})_{;k}. \tag{4.104}$$

Здесь выражение $g^{km}(V_{i;\,m})_k$ представляет собой ковариантные компоненты вектора ΔV.

Пользуясь формулой (4.103) или (4.104) и вводя «физические» компоненты векторов, всегда можно получить уравнение Навье — Стокса в любой конкретной системе криволинейных координат.

Пример 2. *Закон Архимеда.* Сила, действующая со стороны жидкости на погруженное в нее тело с поверхностью S, равна

$$R = \iint_S p_n dS = \iint_S p_k n_k dS.$$

Отсюда

$$R_i = \iint_S p_{ik} n_k dS.$$

Если жидкость покоится ($V=0$), то (стр. 204)

$$p_{ik} = -p\delta_{ik},$$

$$\nabla p = \rho f = \rho g \text{ (массовые силы равны силам тяжести).} \qquad (*)$$

Тогда

$$R_i = -\iint_S p n_i dS,$$

или

$$\boldsymbol{R} = -\iint_S p \boldsymbol{n} dS.$$

Используя теорему Остроградского (4.81), имеем:

$$\boldsymbol{R} = -\iint_S p \boldsymbol{n} dS = -\iiint_\tau \nabla p d\tau.$$

Подставляя ∇p из уравнения равновесия (*), получим

$$\boldsymbol{R} = -\iiint_\tau \rho \boldsymbol{g} d\tau = -\boldsymbol{g} \iiint_\tau \rho d\tau = -\boldsymbol{g} m = -\boldsymbol{G}.$$

Таким образом, сила, действующая со стороны жидкости на погруженное в нее тело, по величине равна G — весу жидкости в объеме тела и направлена в обратную сторону.

Пример 3. *Теорема импульсов в гидроаэромеханике.* Эта теорема занимает важное место в аэрогидромеханике, особенно в экспериментальной. Она позволяет определять силу, действующую на выделенный объем жидкости, зная только ее скорость (и плотность в случае сжимаемой жидкости) на поверхности этого объема, а также силу, действующую на помещенное в движущуюся жидкость твердое тело, по напряжениям и скорости (и плотности) жидкости на определенной поверхности (так называемой *контрольной* поверхности).

Количество движения жидкости, находящейся в момент времени t в некоторой *фиксированной* пространственной области τ, равно

$$\iiint_\tau \rho \boldsymbol{V} d\tau.$$

С течением времени это количество движения меняется, ибо через (τ) проходят различные массы жидкости. Скорость изменения его равна

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_\tau \rho \boldsymbol{V} d\tau.$$

Поскольку область τ является фиксированной, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_\tau \rho \boldsymbol{V} d\tau = \iiint_\tau \frac{\partial}{\partial t} (\rho \boldsymbol{V}) d\tau.$$

Переходя к компонентам, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\tau}\rho V_i d\tau=\iiint\limits_{\tau}\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_i)\,d\tau=$$

$$=\iiint\limits_{\tau}\left(V_i\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial V_i}{\partial t}\right)d\tau.$$

Будем считать, что массовые силы отсутствуют ($f=0$). Тогда, определяя $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ из уравнения неразрывности (4.23) и $\rho\frac{\partial V_i}{dt}$ из уравнения движения (4.96), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\tau}\rho V_i d\tau=\iiint\limits_{\tau}\left[-V_i\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho V_k)-\rho V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\right]d\tau=$$

$$=-\iiint\limits_{\tau}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho V_i V_k-p_{ik})\,d\tau.$$

Преобразуя интеграл, стоящий в правой части, по формуле Остроградского (см. 4.83), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\tau}\rho V_i d\tau=-\iint\limits_{S}(\rho V_i V_k-p_{ik})\,n_k dS=-\iint\limits_{S}\Pi_{ik}n_k dS, \qquad (4.105)$$

где

$$\Pi_{ik}=\rho V_i V_k-p_{ik}.$$

Слева в (4.105) стоит скорость изменения i-й компоненты количества движения жидкости в рассматриваемой неподвижной области. Эта скорость определяется той же i-й компонентой потока тензора Π_{ik} через замкнутую поверхность S, ограничивающую область (τ). Таким образом, величина $\Pi_{ik}n_k dS$ равна i-й компоненте того количества движения, которое в единицу времени уносится через элемент поверхности dS протекающей через (τ) жидкостью. Тогда очевидно, что величина Π_{ik} есть i-я компонента количества движения, уносимого в единицу времени через единичную площадку поверхности S, перпендикулярную k-й оси. Тензор Π_{ik} называется *тензором плотности потока импульса*. Весь поток количества движения через поверхность равен потоку тензора Π_{ik} через нее, т. е.

$$\iint\limits_{S}\Pi_{ik}n_k dS.$$

Следует отличать поток импульса от *потока вектора* ρV, который равен $\iint\limits_{S}\rho V\cdot n dS$. Поток вектора ρV, как уже отмечалось, определяет массу жидкости, уносимую через поверхность S в единицу времени протекающей через τ жидкостью. Вектор ρV (количество движения единицы объема жидкости) по величине равен массе жидкости, протекающей в единицу времени через единичную площадку поверхности S, расположенную перпендикулярно к скорости. Поэтому вектор ρV называют *плотностью потока жидкости*.

Если движение жидкости стационарно $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$, то из (4.105) получим

$$\iint\limits_S \Pi_{ik} n_k dS = \iint\limits_S (\rho V_i V_k - p_{ik}) n_k dS = 0. \tag{4.106}$$

Это уравнение выражает теорему импульсов, которую можно сформулировать так:

При стационарном движении жидкости и равенстве нулю массовых сил поток тензора $\Pi_{ik}=\rho V_i V_k - p_{ik}$ *через любую взятую в жидкости замкнутую поверхность равен нулю.*

Теорема импульсов позволяет непосредственно выразить силу, действующую на выделенный объем жидкости, через скорость и плотность жидкости на поверхности этого объема. Действительно, поскольку массовые силы отсутствуют, то

$$\iint\limits_S p_{ik} n_k dS$$

дает i-ю компоненту главного вектора всех сил, действующих на выделенный объем жидкости. Обозначим ее через F_i. Таким образом, из (4.106) имеем:

$$F_i = \iint\limits_S \rho V_i V_k n_k dS,$$

или в векторной записи

$$F = \iint\limits_S \rho V (V \cdot n)\, dS. \tag{4.107}$$

Пусть в стационарный поток жидкости $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$, при отсутствии массовых сил ($f=0$), помещено твердое тело с поверхностью S (рис. 4.24). Выберем в жидкости «контрольную» поверхность S_0, произвольную, фикси-

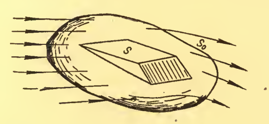


Рис. 4.24.

Сила, действующая в потоке жидкости на тело, поверхность которого S, выражается через поле скоростей и давлений на контрольной поверхности S_0

рованную, но так, чтобы она полностью охватывала твердое тело. Применим к объему жидкости между поверхностью твердого тела S и «контрольной» поверхностью S_0 теорему импульсов (4.106). Получим

$$\iint_S p_{ik} n_k dS + \iint_{S_0} p_{ik} n_k dS_0 - \iint_S \rho V_i V_k n_k dS -$$

$$- \iint_{S_0} \rho V_i V_k n_k dS_0 = 0.$$

Первый интеграл дает выражение для компоненты силы, действующей со стороны тела на рассматриваемый объем жидкости; взятый со знаком минус, он даст компоненту R_i силы, действующей со стороны жидкости на тело, т. е.

$$R_i = -\iint_S p_{ik} n_k dS.$$

Третий интеграл равен нулю в силу отсутствия протекания жидкости через поверхность твердого тела ($V \cdot n = V_k n_k = 0$ на поверхности тела S). Следовательно,

$$R_i = \iint_{S_0} (p_{ik} - \rho V_i V_k)\, n_k dS. \qquad (4.108)$$

Итак, чтобы определить силу, действующую на твердое тело в стационарном потоке жидкости, достаточно на некоторой поверхности S_0, которая может быть удобной для эксперимента, измерить напряжения поверхностных сил, скорость и плотность жидкости.

Особенно простую формулировку приобретает теорема импульсов, если можно пренебречь силами вязкости. В этом случае, как уже отмечалось,

$$p_{ik} = -p\delta_{ik},$$

и выражение (4.65) приобретает вид

$$R_i = -\iint_{S_0} (p n_i + \rho V_i V_k n_k)\, dS_0,$$

или в векторной записи

$$R = -\iint_{S_0} [p n + \rho V (V \cdot n)]\, dS_0. \qquad (4.109)$$

Таким образом, в этом случае достаточно на контрольной поверхности произвести замеры давления и вектора скорости жидкости, чтобы получить силу, действующую на твердое тело. Этот прием часто используется в аэродинамических экспериментах.

В следующем примере мы покажем, как при помощи теоремы импульсов (4.109) можно получить фундаментальную теорему гидроаэромеханики — теорему о подъемной силе плоского контура, полученную Н. Е. Жуковским.

Пример 4. *Теорема Н. Е. Жуковского.* Предварительно рассмотрим один из случаев интегрирования уравнений движения жидкости (4.97).

Пусть всюду в жидкости, движущейся баротропно — плотность является функцией только давления $\rho = \rho(p)$,— выполнено условие rot $\boldsymbol{V} = 0$, а массовые силы $\boldsymbol{f}$ имеют потенциал ($\boldsymbol{f} = -\nabla\Pi$). При этих условиях уравнения (4.97) интегрируются.

Действительно, из формулы (4.59, № 5) при $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ имеем:

$$\text{grad } V^2 = 2(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{V} + 2\boldsymbol{V}\times\text{rot }\boldsymbol{V}.$$

Следовательно, уравнение движения (4.97) может быть записано в форме (форма Громеки)

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} - (\boldsymbol{V}\times\text{rot }\boldsymbol{V}) + \text{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \boldsymbol{f} - \frac{\nabla p}{\rho}.$$

Поскольку rot $\boldsymbol{V} = 0$, то $\boldsymbol{V} = \nabla\varphi$, а вследствие баротропности

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla\int\frac{dp}{\rho(p)}.$$

Следовательно, уравнение движения может быть записано в виде

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Pi + \int\frac{dp}{\rho(p)}\right) = 0.$$

Отсюда видно, что они имеют интеграл

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Pi + \int\frac{dp}{\rho(p)} = \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — некоторых функция времени, определяемая из начальных условий. Этот интеграл называется в гидромеханике интегралом Лагранжа. Отсюда в случае стационарного движения несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) при отсутствии массовых сил получим

$$\frac{\rho V^2}{2} + p = C, \tag{4.110}$$

где C — постоянная.

Перейдем теперь к рассмотрению теоремы Н. Е. Жуковского.

Рассмотрим плоское (зависящее только от координат x_1 и x_2) стационарное течение несжимаемой жидкости, обтекающей плоский контур L (рис. 4.25). Пусть скорость жидкости вдали от контура постоянна и равна $\boldsymbol{V}_\infty$, а всюду в жидкости rot $\boldsymbol{V} = 0$, т. е. течение жидкости безвихревое. Пусть, наконец, массовые силы отсутствуют ($\boldsymbol{f} = 0$).

Применим теорему импульсов в форме (4.109) к объему жидкости, заключенному в цилиндре с высотой, равной единице, и с донышками в виде части плоскостей между контурами L и L_0, где L_0 — окружность* некоторого радиуса r. Тогда получим силу, действующую на единицу длины бесконечного цилиндра с направляющей L в виде**.

$$\boldsymbol{R} = -\oint_{L_0} p\boldsymbol{n}\,dL_0 - \oint_{L_0}\rho\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n})\,dL_0.$$

* Выбор L_0 в виде окружности удобен только с точки зрения сокращения некоторых дальнейших рассуждений.

** Интегралы по донышкам цилиндра пропадают, ибо из них $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n} = 0$. ($\boldsymbol{V}\perp\boldsymbol{n}$), а $\iint p\,\boldsymbol{n}\,dS$ на донышках имеет разный знак и одинаковую величину.

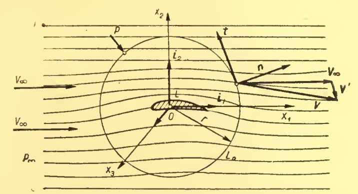


Рис. 4.25. К теореме Н. Е. Жуковского о силе, действующей на твердый контур в стационарвом потоке идеальной жидкости

В это выражение подставим p из (4.110). Так как C и ρ постоянные, то получим

$$R = \frac{\rho}{2}\oint_{L_0} V^2 n\, dL_0 - \rho \oint_{L_0} V(V\cdot n)\, dL_0. \qquad (*)$$

Представим вектор V на контуре L_0 в виде (см. рис. 4.25)

$$V = V_\infty + V'.$$

Здесь V' — скорость возмущения, которая создается в плоскопараллельном потоке жидкости твердым контуром L_0. Относительно этой скорости мы будем предполагать, что она убывает с расстоянием r от начала координат, где помещен контур, как $\frac{1}{r}$.

Подставим разложение V на V_∞ и V' в (*). Получим

$$R = -\frac{\rho V_\infty^2}{2}\oint_{L_0} n\, dL_0 + \rho \oint_{L_0} (V_\infty \cdot V')\, n\, dL_0 +$$

$$+\frac{\rho}{2}\oint_{L_0} V'^2 n\, dL_0 - \rho V_\infty \oint_{L_0} (V'\cdot n)\, dL_0 -$$

$$-\rho \oint_{L_0} V' (V_\infty \cdot n)\, dL_0 - \rho \oint_{L_0} V'(V'\cdot n)\, dL_0.$$

Первый интеграл, как известно из курса анализа, равен нулю. Четвертый интеграл равен нулю в силу условия несжимаемости жидкости, ибо он представляет поток жидкости через замкнутый контур. Третий и шестой интегралы имеют порядок $\frac{1}{r}$; их сумму мы обозначим через $0\left(\frac{1}{r}\right)$.

Тогда

$$R=\rho\oint\limits_{L_0}[(V_\infty\cdot V')\,n-V'\,(V_\infty\cdot n)]\,dL_0+0\left(\frac{1}{r}\right).$$

В силу формулы двойиого векториого произведеиия (1.19) получим

$$R=\rho\oint\limits_{L_0}V_\infty\times(n\times V')\,dL_0+0\left(\frac{1}{r}\right).$$

Поскольку

$$\oint\limits_{L_0}V_\infty\times(n\times V_\infty)\,dL_0=V_\infty\times\left(\oint n\,dL_0\times V_\infty\right)=0,$$

то

$$R=\rho\oint\limits_{L_0}V_\infty\times(n\times V)\,dL_0+0\left(\frac{1}{r}\right)=$$

$$=\rho\,V_\infty\times\oint\limits_{L_0}(n\times V)\,dL_0+0\left(\frac{1}{r}\right).$$

Введем орт i_3 по оси x_3 и орт t по касательиой к коитуру L_0 (рис. 4.25). Тогда (см. 1.12): $n=t\times i_3$;

$$n\times V=(t\times i_3)\times V=i_3\,(t\cdot V)-t\,(i_3\cdot V)=i_3\,(V\cdot t).$$

Обозначая $dL_0=t\,dL_0$, получим

$$R=\rho\,V_\infty\times i_3\oint\limits_{L_0}V\cdot dL_0+0\left(\frac{1}{r}\right).$$

Введем вектор $\Gamma=i_3\oint\limits_{L_0}V\cdot dL_0$; его величииа равна циркуляции скорости по контуру L_0, а иаправлеи ои перпеидикулярио плоскости коитура. Тогда

$$R=\rho\,V_\infty\times\Gamma+0\left(\frac{1}{r}\right).\qquad (**)$$

Поскольку движение безвихревое, то циркуляция по коитуру L_0 равиа циркуляции по любому другому коитуру, охватывающему коитур L. Следовательио, первое слагаемое в (**) ие зависит от велнчииы радиуса r окружности L_0.

Теперь будем удалять контур L_0 от иачала координат иа бесконечиость. Теорема импульсов остается справедливой, ибо часть иитегралов (R и $\rho\,V_\infty\times\Gamma$) остается конечной, а часть $\left(0\left(\frac{1}{r}\right)\right)$ идет к иулю. Таким образом, при $r\to\infty$ имеем:

$$R=\rho\,V_\infty\times\Gamma;$$

$$\Gamma=i_3\oint\limits_{L}V\cdot dL.$$

Эта формула и выражает знаменитую теорему Н. Е. Жуковского о подъемной силе плоского контура. По величине эта сила равна $\rho V_\infty \Gamma$ и направлена всегда перпендикулярно вектору V_∞.

4.9. Потенциальное векторное поле. Скалярный потенциал

Векторное поле называется потенциальным, если его вектор $\boldsymbol{A}$ является градиентом некоторой скалярной функции φ, т. е.

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} \varphi \equiv \nabla\varphi. \tag{4.111}$$

Величина φ называется потенциалом поля $\boldsymbol{A}$. Потенциал векторного поля определяется с точностью до аддитивной постоянной, что следует из (4.111).

Потенциальный вектор $\boldsymbol{A}$ в системе прямоугольных декартовых координат имеет проекции:

$$A_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}; \quad A_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}; \quad A_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}.$$

Потенциальное поле является одним из наиболее простых векторных полей, ибо оно полностью определяется одним скаляром — потенциалом.

Рис. 4.26.

Криволинейный интеграл от потенциального вектора не зависит от пути интегрирования и, если контур интегрирования замкнутый, равен нулю

Отметим основное свойство потенциального поля.

Если потенциал φ поля $\boldsymbol{A}$ есть однозначная функция, то значение криволинейного интеграла

$$\int_{M_0}^{M} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{L}$$

не зависит от пути интегрирования, а лишь от конечных точек пути M_0 и M (рис. 4.26).

Действительно, если $\boldsymbol{A} = \nabla\varphi$, то

$$\int_{M_0}^{M} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{L} = \int_{M_0}^{M} \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{L} = \int_{M_0}^{M} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} dx_3 \right) =$$

$$= \int_{M_0}^{M} d\varphi = \varphi(M) - \varphi(M_0).$$

Отсюда следует, что *в случае однозначного потенциала интеграл от потенциального вектора по замкнутому пути равен нулю*, т. е.

$$\oint\limits_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{L} = \oint\limits_L \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{L} = \varphi(M_0) - \varphi(M_0) = 0.$$

Этот факт имеет большое значение в теории потенциальных полей и зачастую принимается за определение потенциального поля.

Выделение класса потенциальных полей очень важно. Если силовое поле имеет однозначный потенциал, то вычисление работы сил поля сводится просто к определению разности потенциалов в начальной и конечной точках пути. Потенциальность скоростного поля жидкости значительно упрощает задачи гидроаэромеханики, позволяет при изучении плоских потоков использовать такой хорошо разработанный математический аппарат, как теория функций комплексного переменного, преобразование годографа, метод характеристик и др. В связи с этим важно определить критерий потенциальности поля.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы в односвязной области векторное поле **A** *было потенциальным, является выполнение равенства*

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = 0.$$

Необходимость этого условия устанавливается просто. Пусть $\boldsymbol{A} = \nabla\varphi$. Тогда стоит только предположить, что потенциал поля $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ имеет непрерывные первые и вторые частные производные, т. е. что вихрь $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ существует и равенство $\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{rot}\nabla\varphi = 0$ проверяется непосредственным вычислением.

Итак, *всякое потенциальное поле является полем безвихревым, независимо от связности области.*

Достаточность условия может быть установлена только для односвязной области. Действительно, если область поля односвязна, то *любой* замкнутый контур в этом поле ограничивает некоторую поверхность, лежащую целиком в этом поле. Иначе говоря, какой бы замкнутый контур мы ни взяли в таком векторном поле, всегда на этот контур можно «натянуть» поверхность, которая будет целиком оставаться в нашей области поля. Но тогда для *произвольного* замкнутого контура L и ограниченной им поверхности S применима формула Стокса

$$\oint\limits_L \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{L} = \iint\limits_S \boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\,dS.$$

В силу условия $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$ для *любого* замкнутого контура L поля имеем равенство нулю циркуляции:

$$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{L} = 0.$$

Отсюда следует, что криволинейный интеграл

$$\int_{M_0}^{M} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{L}$$

не зависит от пути интегрирования и при фиксированной точке M_0 зависит только от положения точки M, т. е. является функцией ее координат. Это может быть тогда и только тогда*, если выражение $\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{L}$ является полным дифференциалом некоторой функции, т. е.

$$\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{L} = d\varphi,$$

или

$$A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3.$$

Отсюда

$$A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

т. е.

$$\boldsymbol{A} = \nabla \varphi.$$

При этом

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \int_{M_0}^{M(x_1, x_2, x_3)} d\varphi = \int_{M_0}^{M(x_1, x_2, x_3)} A_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 +$$

$$+ A_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_2 + A_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_3 = \int_{M_0}^{M(x_1, x_2, x_3)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{L}.$$

Эта формула дает способ построения однозначного потенциала в односвязной области безвихревого вектора $\boldsymbol{A}$.

Итак, *всякое безвихревое поле является потенциальным только в односвязной области.*

Теперь рассмотрим случай, когда область поля не односвязна. В этом случае, по самому определению неодносвязной области, в ней существуют замкнутые контуры, которые не ограничивают никакой поверхности, т. е. на такие контуры нельзя «натянуть» поверхность, целиком лежащую в области

---

* См., например, А. Я. Хинчин. Краткий курс математического анализа, § 124—125, ГИТЛ, 1953.

поля. Следовательно, в этом случае уже нельзя построить однозначную функцию потенциала в каждой точке. Поэтому в этом случае иногда говорят о *многозначном* потенциале поля.

Рассмотрим пример многозначного потенциала. Напряженность магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника, расположенного по оси (x_3), имеет выражение

$$H = \frac{2I}{r^2}(i_3 \times r),$$

где I — сила тока; $r = i_1 x_1 + i_2 x_2$; $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Имеем:

$$H_1 = -2I\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2};$$

$$H_2 = 2I\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2};$$

$$H_3 = 0.$$

Вектор H (рис. 4.27) определен всюду, кроме оси (x_3), где $r = 0$. Поэтому векторное поле занимает двухсвязную область (все пространство с вырезанной осью x_3).

Можно проверить, что всюду в поле $\operatorname{rot} H = 0$; на оси (x_3) $\operatorname{rot} H$, как и H, не определен.

Потенциал этого поля

$$\varphi = 2I \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = H_1;\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = H_2;\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = H_3\right)$$

является многозначной функцией.

Если вычислить криволинейный интеграл $\int H \cdot dL$ по контуру L, охватывающему ось (x_3), то изменение потенциала будет определяться изменением угла (полярного) $\operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}$. Поэтому, выйдя из некоторой точки M_0, мы после интегрирования, обойдя вокруг оси (x_3), придем в эту точку не с начальным значением потенциала, а со значением на $2I \cdot 2\pi$ большим. Таким образом, несмотря на то, что всюду в поле $\operatorname{rot} H = 0$, существуют такие контуры, по которым циркуляция $\oint H \cdot dL \neq 0$.

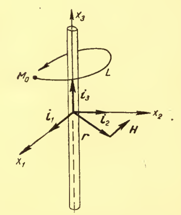


Рис. 4.27. Потенциал магнитного поля бесконечного проводника является неоднозначной функцией

Многозначность потенциала отражается на векторных линиях поля (рис. 4.28). Если потенциал однозначен, то векторные линии его градиента не могут быть замкнутыми, ибо

тогда по таким линиям $\int \nabla\varphi \cdot dL \neq 0$. У многозначного потенциала возможны замкнутые некоторые линии его градиента.

Можно избавиться от многозначности потенциала путем введения дополнительных границ области, преобразуя этим ее в односвязную область. Дополнительные границы должны

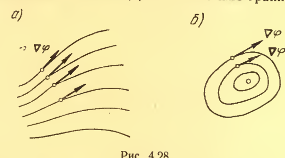


Рис. 4.28.

а) однозначный потенциал не может иметь замкнутых векторных линий векторного поля своего градиента;
б) градиент многозначного потенциала имеет замкнутые векторные линии

исключать те контуры, которые нельзя стянуть в точку (рис. 4.5). Тогда многосвязная область будет односвязной, в которой равенство $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$ влечет за собой потенциальность вектора $\boldsymbol{A}$, т. е. $\boldsymbol{A} = \nabla\varphi$, с однозначным потенциалом φ.

4.10. Соленоидальное векторное поле. Векторный потенциал

Векторное поле называется соленоидальным, если его вектор $\boldsymbol{A}$ *является вихрем некоторого другого вектора, т. е.*

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{W}.$$

Вектор $\boldsymbol{W}$ называется *векторным потенциалом* поля $\boldsymbol{A}$. Соленоидальный вектор в системе прямоугольных декартовых координат имеет проекции:

$$A_1 = \frac{\partial W_3}{\partial x_2} - \frac{\partial W_2}{\partial x_3};$$

$$A_2 = \frac{\partial W_1}{\partial x_3} - \frac{\partial W_3}{\partial x_1};$$

$$A_3 = \frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2}.$$

Векторный потенциал поля определяется с точностью до градиента произвольной функции, т. е. если $\boldsymbol{W}$ — векторный

потенциал поля $\boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{W}' = \boldsymbol{W} + \operatorname{grad} f$ — тоже векторный потенциал того же поля, ибо

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{W}' = \operatorname{rot} \boldsymbol{W} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \operatorname{rot} \boldsymbol{W}.$$

Необходимым и достаточным условием соленоидальности поля является равенство нулю его дивергенции, т. е. $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$.

Необходимость этого условия проверяется непосредственным вычислением. Действительно, если $\boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{W}$, то

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{W} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial W_3}{\partial x_2} - \frac{\partial W_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_3} - \frac{\partial W_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2}\right) = 0.$$

Что касается *достаточности* этого условия, то для случая поля, занимающего неограниченное пространство, она будет установлена позже (см. 4.12). При этом надо потребовать существования $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ и убывания $|\operatorname{rot} \boldsymbol{A}|$ на бесконечности как $\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}$, где $\varepsilon > 0$ и $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Тогда можно построить однозначно векторный потенциал $\boldsymbol{W}$ поля $\boldsymbol{A}$ так, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{W} = \boldsymbol{A}$. В случае, если поле $\boldsymbol{A}$ занимает ограниченное пространство, для отыскания векторного потенциала этого поля при условии $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$ всюду надо потребовать дополнительных условий относительно производных $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ на границе поля.

Можно показать непосредственным интегрированием системы

$$A_1 = \frac{\partial W_3}{\partial x_2} - \frac{\partial W_2}{\partial x_3}; \qquad (*)$$

$$A_2 = \frac{\partial W_1}{\partial x_3} - \frac{\partial W_3}{\partial x_1}; \qquad (**)$$

$$A_3 = \frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2} \qquad (***)$$

при условии

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = 0 \qquad (****)$$

возможность построения векторного потенциала $\boldsymbol{W}$ поля A.

Будем искать W_1 в виде функции от x_1, т. е.

$$W_1 = f(x_1).$$

Тогда из (**) имеем:

$$W_3 = -\int A_2\, dx_1 + \varphi(x_2, x_3),$$

а из (***)

$$W_2 = \int A_3\,dx_1 + \psi(x_2,\ x_3).$$

Здесь φ и ψ — произвольные функции от x_2 и x_3, которые должны быть подчинены условию, вытекающему из уравнения (*). Подставляя в это уравнение найденные выражения для W_3 и W_2, получим

$$A_1 = -\int \frac{\partial A_2}{\partial x_2}\,dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \int \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\,dx_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x_3}.$$

Но из (****) имеем:

$$A_1 = -\int \frac{\partial A_2}{\partial x_2}\,dx_1 - \int \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\,dx_1.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0.$$

Таким образом, $f(x_1)$, $\varphi(x_1,\ x_2)$, $\psi(x_2,\ x_3)$ произвольные, непрерывно дифференцируемые функции (поле A непрерывно). Условие, накладываемое на φ и ψ, является следствием того, что решение системы (*), (**), (***) определяется с точностью до градиента произвольной функции.

Пример соленоидального поля. В плоской задаче гидромеханики несжимаемой жидкости ($\operatorname{div} V = 0$) векторным потенциалом поля скоростей служит вектор, равный по величине функции тока.

Функция тока $\psi(x_1,\ x_2)$ определяется как функция, которая вдоль векторных линий поля V — вдоль линий тока — сохраняет постоянное значение. Уравнение семейства линий тока, следовательно, может быть записано так: $\psi(x_1,\ x_2) = \text{const}$. Дифференциальное уравнение линий тока в плоском случае (см. 4.15) имеет вид

$$V_1 dx_2 - V_2 dx_1 = 0.$$

Для того, чтобы левая часть этого уравнения была полным дифференциалом некоторой функции (функции тока), как известно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial V_2}{\partial x_2}.$$

А это обеспечивается уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = 0.$$

Таким образом, можно ввести функцию тока $\psi(x_1,\ x_2)$ так, что

$$V_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}; \quad V_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

В то же время можно записать:

$V = \operatorname{rot} W$, где $W = i_3\psi$, так что

$$V = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix}.$$

Отметим, что в этом случае поле V может быть записано в виде

$$V = \nabla\psi \times i_3,$$

а поле вихря скорости в виде

$$\mathrm{rot}\, V = -i_3 \Delta\psi.$$

Рассмотрим некоторые характерные свойства соленоидального поля.

1. *Интенсивность векторной трубки соленоидального поля есть величина постоянная вдоль всей трубки.*

Возьмем в поле A некоторый замкнутый контур L (рис. 4.29) и проведем через его точки векторные линии поля. Образовавшаяся поверхность носит название векторной трубки. Интенсивностью векторной трубки называется поток поля через ее поперечное сечение (контур этого сечения пересекает все векторные линии трубки).

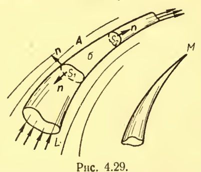


Рис. 4.29.

Интенсивность векторной трубки соленоидального поля постоянна вдоль всей трубки. Векторная трубка соленоидального поля не может оканчиваться или начинаться в поле

Выберем произвольно два поперечных сечения трубки — S_1 и S_2 — и применим теорему Остроградского к объему, ограниченному S_1 и S_2 и поверхностью σ трубки между S_1 и S_2. Имеем:

$$\iiint\limits_{\tau} \mathrm{div}\, A d\tau = \iint\limits_{\sigma} n \cdot A d\sigma + \iint\limits_{S_1} n \cdot A dS_1 + \iint\limits_{S_2} n \cdot A dS_2.$$

Интеграл слева равен нулю, ибо $\mathrm{div}\, A = 0$; первый интеграл справа тоже равен нулю, ибо на поверхности трубки $A \perp n$, так что $A \cdot n |_\sigma = 0$. Перенося интеграл по S_1 влево и меняя в этом интеграле направление n на противоположное (тогда поток через S_1 и S_2 будет вычислен в одном направлении), получим

$$\iint\limits_{S_1} n \cdot A dS_1 = \iint\limits_{S_2} n \cdot A dS_2,$$

что и требовалось доказать.

2. *В соленоидальном поле векторные трубки не могут ни кончаться, ни начинаться внутри поля; следовательно, они либо замкнуты, либо имеют концы на границе поля, либо имеют бесконечные ветви* (в случае неограниченного поля).

Этот факт следует из первого свойства трубок соленоидального поля. Действительно, если какая-либо трубка заканчивается в точке M (рис. 4.29), то в этой точке вектор должен принимать бесконечно большое значение, ибо интенсивность трубки постоянная, а ее поперечное сечение в точке M равно нулю. А этого быть не может, ибо A непрерывен (по предположению) во всех точках поля.

Если предположить, что трубка заканчивается в поле конечным сечением S_0, то в точках этого сечения поле A будет разрывным, что исключено.

4.11. Лапласово векторное поле. Гармонические функции

Векторное поле $A(r)$ называется лапласовым, если в любой его точке выполняются равенства

$$\operatorname{rot} A = 0;$$

$$\operatorname{div} A = 0.$$

Таким образом, лапласово поле является одновременно и потенциальным, и соленоидальным.

Лапласово поле в односвязной области полностью определяется скалярным потенциалом φ, который является решением уравнения Лапласа, т. е.

$$\Delta\varphi = 0.$$

Это следует из того, что если $\operatorname{rot} A = 0$, то в односвязной области $A = \nabla\varphi$ и тогда $\operatorname{div} A = \operatorname{div} \nabla\varphi = \Delta\varphi$.

Изучение потенциала лапласова векторного поля основывается на свойствах *гармонических функций*.

Гармонические функции. Функция φ непрерывная вместе с производными первого и второго порядка, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0,$$

называется *гармонической*.

Примерами гармонических функций могут служить функции:

$$\varphi = c;\ \varphi = ax_1 + bx_2 + cx_3;\ \varphi = x_1^2 - x_3^2;\ \varphi = x_1 x_2;$$

$$\varphi = x_1 x_2 x_3;\ \varphi = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{k}{2}} \left\{ a \sin\left(k \operatorname{arc\,tg} \frac{x_2}{x_1}\right) + \right.$$

$$\left. + b \cos\left(k \operatorname{arc\,tg} \frac{x_2}{x_1}\right) \right\}.$$

Особый интерес представляет гармоническая функция $\frac{1}{r}$, где

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \equiv \sqrt{x_i x_i}.$$

Действительно, для производных по x_i, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x_i}{r^3}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3x_i^2 - r^2}{r^5}.$$

Поэтому

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= \frac{3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 3r^2}{r^5} = 0.$$

Функция $\frac{1}{r}$ — гармоническая всюду, кроме начала координат ($r = 0$). Функция $\ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ также является гармонической функцией всюду, кроме начала координат.

Остановимся на некоторых свойствах гармонических функций.

1. *Интеграл по замкнутой поверхности S от нормальной производной гармонической функции равен нулю, если в области, ограниченной S, функция всюду гармоническая.*

Это свойство следует из выражения (4.90). Если φ — гармоническая функция ($\Delta\varphi = 0$), то из (4.90) имеем:

$$\iint\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS = 0. \tag{4.112}$$

2. *Если φ, ψ гармонические функции всюду в области τ, то значения этих функций и их нормальных производных на границе S этой области связаны соотношением*

$$\iint\limits_S \varphi\, \frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS = \iint\limits_S \psi\, \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS.$$

Это свойство следует из выражения (4.88).

3. *Функция, гармоническая внутри области τ, может быть найдена в любой точке этой области по значениям этой функции и ее нормальной производной на границе области по формуле*

$$4\pi\varphi(M_0) = \iint\limits_S \left(\varphi\, \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\, \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS. \tag{4.113}$$

Эта формула следует из выражения (4.94), примененного к гармонической функции φ.

4. В применении к поверхности S_R сферы радиуса R с центром в точке M_0 формула (4.113) дает

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{S_R} \varphi \, dS, \tag{4.114}$$

ибо по первому свойству

$$\iint\limits_{S_R} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS = \frac{1}{R} \iint\limits_{S_R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS = 0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \bigg|_{S_R} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \bigg|_{r=R} = -\frac{1}{R^2}.$$

Формула (4.114) выражает теорему, утверждающую, что *значение гармонической функции в некоторой точке M_0 равно среднему значению этой функции на любой сфере S_R с центром в M_0, целиком расположенной в области гармоничности функции.*

5. *Гармоническая функция не может иметь ни максимума, ни минимума внутри области гармоничности.*

Действительно, если в какой-либо внутренней точке M_0 функция φ достигает максимума и если φ не является постоянной, то найдется такой луч, проведенный из M_0, в некоторой точке M_1 которого будем иметь $\varphi(M_1) < \varphi(M_0)$. Пару точек M_0 и M_1 можно заменить аналогичной парой точек, лежащих на том же луче и таких, что сфера с центром в M_0, проходящая через M_1, целиком лежит в рассматриваемой области. Но тогда на некоторой части σ этой сферы по непрерывности будем иметь $\varphi(M)|_\sigma < \varphi(M_0)$.

Применяя формулу (4.114) к этой сфере, получим

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi (M_0M_1)^2} \iint\limits_{S_{M_0M_1}} \varphi(M) \, dS.$$

Отсюда следует

$$\varphi(M_0) < \max \varphi(M) = \varphi(M_0),$$

что абсурдно.

Аналогично можно показать, что φ не может достигать минимума на внутренних точках области гармоничности.

6. *Гармоническая функция, принимающая постоянные значения на границе некоторой конечной области, постоянна внутри всей области.*

Действительно, если на границе области $\varphi = c$, то, согласно предыдущему свойству, по всей области максимальное

и минимальное значение φ равно c, ибо во внутренних точках функция φ не может принимать значений ни больших c, ни меньших c. Значит, φ постоянная по всей области и вследствие непрерывности $\varphi = c$ всюду в этой области.

7. *Уравнение Лапласа* $\Delta\varphi = 0$ *имеет единственное решение в области, на границе которой* φ *принимает заданные значения.*

Допустим, что φ_1 и φ_2 — две различные гармонические функции, принимающие одинаковые значения на границе области. Тогда функция $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ в силу линейности уравнения Лапласа тоже будет гармонической, принимающей на границе постоянное, равное нулю значение.

Тогда, по свойству (6), функция φ постоянна, а в силу непрерывности — равна нулю всюду внутри области. Значит, $\varphi_1 = \varphi_2$, т. е. гармоническая функция полностью определяется ее значениями на границе области.

Задачи Дирихле и Неймана. Последнее свойство гармонических функций позволяет говорить о единственности решения *задачи об определении гармонической в области функции по заданным ее значениям на границе области.* Эта задача носит название задачи Дирихле. Она заключается в отыскании в области τ решения уравнения

$$\Delta\varphi = 0$$

при граничном условии

$$\varphi|_S = f(x_1, x_2, x_3),$$

где S — граница области.

Если в формуле Грина (4.87) при $\varphi = \psi$ считать, что $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ на границе S области τ, то получим, что гармоническая функция φ будет произвольной постоянной внутри области.

Отсюда следует, что две гармонические функции, имеющие на границе односвязной области одинаковые нормальные производные $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 0\right)$, отличаются на постоянную величину.

Таким образом, нормальная производная гармонической функции на границе односвязной области определяет (с точностью до произвольного постоянного слагаемого) значения этой функции во всех внутренних точках области.

Следовательно, можно говорить о единственности решения *задачи определения гармонической в односвязной области функции по заданным значениям ее нормальной произ-*

водной на границе области. Эта задача называется задачей Неймана. Она заключается в отыскании решения уравнения

$$\Delta\varphi = 0$$

при граничном условии

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = F(x_1,\ x_2,\ x_3).$$

Если же область гармоничности функции многосвязна, то надо знать не только $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ на границе области, но и значение циркуляции градиента поля $\int \nabla\varphi \cdot dL$ по тем контурам, которые не могут быть стянуты в точку. Если все эти контуры имеют циркуляцию, равную нулю, то в решении задачи Неймана никаких новых затруднений не возникает. Если заданы отличные от нуля значения циркуляции по этим контурам, то потенциал этого поля будет многозначным, увеличивающим свое значение на постоянную (циклическую) при каждом обходе по контуру. Но тем не менее задача будет иметь единственное решение.

Действительно, пусть φ_1, φ_2 — два потенциала, удовлетворяющих уравнению Лапласа с заданными на границе нормальными производными. Но тогда $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — *однозначная* функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа и имеющая на границе области нормальную производную, равную нулю. Поскольку эта функция однозначна, то из формулы Грина (4.87) следует, что φ постоянна всюду и, следовательно, φ_1 и φ_2 отличаются на постоянную.

Имея в виду то, что гармоническая функция является потенциалом лапласового векторного поля, мы теперь можем утверждать следующее:

Лапласово векторное поле полностью определяется в каждой точке односвязной области либо значением его скалярного потенциала, либо значением нормальной производной потенциала, заданных на границе этой области; в случае многосвязной области дополнительно к нормальной производной на границе области необходимо задать значение циркуляции градиента поля по тем контурам, которые не могут быть стянуты в точку, не выходя за поле.

Рассмотрим несколько гидродинамических примеров, связанных с теорией гармонических функций.

Пример 1. Задачи Неймана и Дирихле — это основные задачи безвихревых стационарных потоков несжимаемой идеальной жидкости.

Если $\rho = \text{const}$, $\text{rot}\, V = 0$, то, как известно из гидромеханики, уравнения движения допускают интеграл Лагранжа для стационарного случая (см. также 4.8, пример 3)

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const}$$

(здесь p, ρ, V — соответственно давление, плотность и скорость жидкости).

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\text{div}\, V = 0.$$

В силу $\text{rot}\, V = 0$ имеем $V = \nabla\varphi$.

Потенциал скорости φ является гармонической функцией в силу уравнения неразрывности

$$\text{div}\, V = \text{div}\, \nabla\varphi = \Delta\varphi = 0.$$

На твердых контурах нормальная составляющая скорость обращается в нуль. Отсюда граничное условие для φ:

$$V_n = V \cdot n = n \cdot \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ — на твердых контурах.}$$

Так как $\text{div}\, V = 0$, то V в плоском случае имеет векторный потенциал вида

$$W = i_3\psi,$$

где ψ — функция тока (см. стр. 220), так что

$$V_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}; \quad V_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}.$$

Из условия $\text{rot}\, V = 0$, получим

$$\Delta\psi = 0.$$

На твердых контурах ψ принимает постоянное значение в силу того, что они являются линиями тока, т. е. $\psi = c$ на твердых контурах (рис. 4.30).

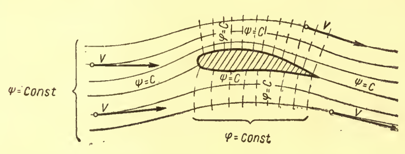


Рис. 4.30.

На твердом контуре, обтекаемом невязкой жидкостью, нормальная компонента скорости $V_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$; сам контур является линией тока $\psi = C$

Итак, для φ имеем задачу Неймана, а для ψ — задачу Дирихле.

В гидромеханике для решения задач Неймана и Дирихле широко используется метод конформных отображений.

В плоских задачах гидромеханики задаются твердые контуры (один или несколько) в безграничной области потока. На бесконечности поток является однородным, так что

$$\nabla\varphi|_\infty = V_\infty.$$

На твердых контурах $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0.$

Каждый твердый замкнутый контур в плоском потоке увеличивает связность области течения жидкости на единицу. Поэтому для определенности задачи Неймана необходимо задавать значение циркуляции скорости $V = \nabla\varphi$ вокруг каждого из твердых контуров; значение этой циркуляции выбирается согласно известному постулату Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина так, чтобы острые кромки профилей были линиями раздела струй.

Пример 2. Пусть φ — потенциал безвихревого течения несжимаемой жидкости, т. е.

$$V = \nabla\varphi,$$
$$\operatorname{div} V = 0,\ \Delta\varphi = 0,$$
$$\operatorname{rot} V = 0.$$

Тогда из свойств гармонических функций следует:

1. Интенсивность трубок тока (векторных трубок) постоянна по их длине; сами трубки не могут ни начинаться, ни кончаться в потоке (см. 4.10).

2. В односвязной области, полностью ограниченной твердыми стенками $\left(\text{на них } \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0\right)$, не может возникнуть непрерывное безвихревое течение.

3. Кинетическая энергия некоторого объема жидкости τ, ограниченного поверхностью S, может быть вычислена по формуле (см. задачу 17, гл. 4)

$$T = \frac{\rho}{2}\iint_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS.$$

Это следует из (4.52) и определения

$$T = \frac{\rho}{2}\iiint_\tau V^2 d\tau = \frac{\rho}{2}\iiint_\tau (\nabla\varphi)^2 d\tau.$$

4.12. Основная теорема векторного анализа

В векторном анализе имеет большое значение теорема Стокса, особенно часто применяемая в аэромеханике и электродинамике, о расщеплении векторного поля $\boldsymbol{A}$ на два: $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$. Речь идет о полях, определенным образом исчезающих на бесконечности — именно $|\boldsymbol{A}|$ обращается на бесконечности в нуль как $\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}$, а $|\operatorname{div}\boldsymbol{A}|$ и $|\operatorname{rot}\boldsymbol{A}|$ — как $\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}$, где $\varepsilon > 0$. Как будет видно из доказательств, это предположение необходимо для сходимости интегралов, дающих выражение $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ через $\boldsymbol{A}$.

Теорема. *Любое непрерывное векторное поле $A(r)$, заданное во всем пространстве и исчезающее на бесконечности вместе со своими дивергенцией и вихрем, может быть един-*

ственным образом (с точностью до векторной постоянной) представлено в виде суммы потенциального $\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r})$ *и соленоидального* $\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r})$ *полей, т. е.*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r}),$$

где

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1 &= 0; \\ \operatorname{div} \boldsymbol{A}_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.115)$$

Сделаем предварительно два замечания, а затем перейдем к доказательству теоремы.

1. Поскольку

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \operatorname{div} \boldsymbol{A}_1 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_2, \qquad (4.116)$$

то при разложении поля (4.115) получается, что все источники и стоки включаются в первую часть разложения $\boldsymbol{A}_1$, а все вихри — во вторую часть $\boldsymbol{A}_2$. Таким образом, конструктивный результат теоремы (выражение $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ через $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ позволяет решить задачу определения поля $\boldsymbol{A}$ по заданному распределению его дивергенции $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \theta(\boldsymbol{r})$ и вихря $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \Omega(\boldsymbol{r})$.

2. Мы называем поле $\boldsymbol{A}_1$ потенциальным, а поле $\boldsymbol{A}_2$ — соленоидальным, хотя нам известно только, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1 = 0$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{A}_2 = 0$. В процессе доказательства будет ясно, что вектор $\boldsymbol{A}_1$ всегда можно считать потенциальным, ибо если область определения этого вектора окажется многосвязной, то всегда можно провести дополнительные ее границы, уничтожающие многосвязность; для вектора $\boldsymbol{A}_2$ будет построен векторный потенциал, так что $\boldsymbol{A}_2$ — действительно соленоидальное поле.

Доказательство. Для доказательства мы построим поле $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ по заданному полю $\boldsymbol{A}$, а затем покажем, что такое определение однозначно (с точностью до постоянного вектора).

Построение $\boldsymbol{A}_1$. Для нахождения $\boldsymbol{A}_1$ имеем из (4.115) и (4.116) уравнения:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1 &= 0; \\ \operatorname{div} \boldsymbol{A}_1 &= \operatorname{div} \boldsymbol{A}. \end{aligned} \qquad (4.117)$$

Из первого уравнения следует, что

$$\boldsymbol{A}_1 = \nabla\varphi + \boldsymbol{C}_1,$$

где $\boldsymbol{C}_1$ — постоянный вектор, а φ — однозначный потенциал (если область определения $\boldsymbol{A}_1$ многосвязна, считаем, что проведены дополнительные границы, превращающие эту область в односвязную).

Тогда второе уравнение (4,117) дает

$$\operatorname{div}(\nabla\varphi + \boldsymbol{C}_1) = \operatorname{div}\boldsymbol{A},$$

или

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\boldsymbol{A}.$$

Постоянная $\boldsymbol{C}$ для определения потенциала φ роли не играет.

Из этого уравнения (уравнение Пуассона), с известной правой частью, можно вычислить φ, используя следствие (4.94) из теоремы Грина. Применяя формулу (4.94) к неограниченному объему τ, где отыскивается функция φ, мы получим, что поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS$$

обращается в нуль, если считать, что φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ стремятся к нулю на бесконечности, причем $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ стремится к нулю быстрее, чем $\frac{1}{r}$.

Тогда, поскольку значение $\Delta\varphi$ во всех точках пространства нам задано, значение φ может быть представлено формулой

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\operatorname{div}\boldsymbol{A}}{r}\, d\tau, \tag{4.118}$$

где r — расстояние от точки (x_1, x_2, x_3), в которой вычисляется значение φ до произвольной точки (ξ_1, ξ_2, ξ_3) области интегрирования, в которой вычисляется $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ и располагается элементарный объем $d\tau$. Интегрирование распространяется на всю область определения $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$.

Тогда

$$\boldsymbol{A}_1 = \nabla\varphi + \boldsymbol{C}_1 = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\iiint \frac{\operatorname{div}\boldsymbol{A}}{r}\, d\tau + \boldsymbol{C}_1. \tag{4.119}$$

Проекции этого вектора вычисляются по формуле

$$A_{1x_i}(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}\iiint \frac{\operatorname{div}\boldsymbol{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2}} + C_{1x_i}$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Построение $\boldsymbol{A}_2$. Вектор $\boldsymbol{A}_2$, как это следует из (4.115) и (4.116), определяется системой уравнений

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_2 = \operatorname{rot}\boldsymbol{A};$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}_2 = 0. \tag{4.120}$$

Будем искать решение этой системы в виде

$$A_2 = \operatorname{rot} W + C_2, \qquad (4.121)$$

причем векторный потенциал W подчиним дополнительному условию

$$\operatorname{div} W = 0. \qquad (4.122)$$

Такое ограничение, наложенное на векторный потенциал, несущественно, ибо он определен с точностью до градиента произвольной функции. Так что если считать, что $\operatorname{div} W = \vartheta \neq 0$, то можно рассматривать вместо W вектор $W' = W + \nabla f$, который также будет векторным потенциалом поля A_2 (ибо $\operatorname{rot} W' = \operatorname{rot} W$) при произвольной функции f. Но теперь всегда можно подобрать так функцию f, чтобы $\operatorname{div} W' = 0$. Для этого достаточно f определить из уравнения

$$\operatorname{div} W' = \operatorname{div} W + \operatorname{div} \nabla f = 0,$$

или

$$-\vartheta = \Delta f.$$

Итак, мы можем всегда считать, что векторный потенциал соленоидального поля также есть соленоидальный вектор. Но тогда этот вектор определяется из уравнения, полученного подстановкой (4.121) в первое из уравнений (4.120)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} W + C_2) = \operatorname{rot} A,$$

или

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} W = \operatorname{rot} A.$$

Используя выражение для $\operatorname{rot}\operatorname{rot} W$ (см. 4.59) и учитывая (4.122), получим

$$-\Delta W = \operatorname{rot} A.$$

Выражение W через $\operatorname{rot} A$ может быть получено при помощи формулы (4.94, а) точно так же, как было получено частное решение уравнения Пуассона (4.118) при помощи формулы (4.94).

Постоянная C_2 не играет никакой роли при определении W. Итак, имеем:

$$W = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\operatorname{rot} A}{r}\, d\tau. \qquad (4.123)$$

Тогда

$$A_2 = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\iiint \frac{\operatorname{rot} A}{r}\, d\tau + C_2. \qquad (4.124)$$

Отсюда, например, проекция этого вектора на ось (x_1) равна

$$A_{2x_1}(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\iiint \frac{\operatorname{rot}_{x_3} A(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}}\,d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_3}\iiint \frac{\operatorname{rot}_{x_2} A(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}}\,d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3\right] + C_{2x_1}.$$

Интегрирование распространяется здесь на всю область определения $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$.

Таким образом, окончательное выражение для разложения векторного поля $\boldsymbol{A}$ имеет вид:

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\iiint\frac{\operatorname{div} \boldsymbol{A}}{r}\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\iiint\frac{\operatorname{rot} \boldsymbol{A}}{r}\,d\tau. \tag{4.125}$$

Постоянные $\boldsymbol{C}_1$ и $\boldsymbol{C}_2$ здесь отброшены, ибо поле $\boldsymbol{A}$ по условию должно исчезать на бесконечности. Формула (4.125) дает выражение для восстановления поля по его вихрям и дивергенции, т. е. когда известны только функции

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \theta(\boldsymbol{r}),$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{r}),$$

и требуется определить поле $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$.

Однозначность разложения поля. Пусть наряду с разложением

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2; \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1 = 0; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{A}_2 = 0$$

существует другое разложение

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1' + \boldsymbol{A}_2'; \ \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1' = 0; \ \operatorname{div} \boldsymbol{A}_2' = 0.$$

Тогда, поскольку $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \operatorname{div} \boldsymbol{A}_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{A}_1'$, то $\operatorname{div}(\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_1') = 0$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}'$ образует лапласово поле, ибо

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_1') = 0,$$
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_1') = 0.$$

Аналогично вектор $\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_2'$ также образует лапласово поле, ибо

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_2') = 0,$$
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_2') = 0.$$

Согласно (4.76) и (4.81), эти векторы могут быть только постоянными, т. е.

$$(A_1 - A_1') \times n = 0,$$

$$A_2 - A_2' = \text{const}.$$

Итак наше разложение действительно однозначно с точностью до произвольной постоянной.

Замечание по поводу однозначности в случае конечной области. Можно показать, что непрерывное векторное поле в конечном объеме однозначно определяется дивергенцией и вихрем во внутренних точках и нормальной компонентой на границе области.

Действительно, пусть существует решение системы

$$\operatorname{div} A = \theta(r),$$

$$\operatorname{rot} A = \Omega(r)$$

при граничном условии

$$A \cdot n \big|_S = f(r),$$

где функции θ, Ω определены для всех точек области, а f — для точек границы. Функции θ и f, естественно, должны быть подчинены условию, следующему из теоремы Гаусса-Остроградского:

$$\iiint_\tau \theta d\tau = \iint_S f dS.$$

Такое решение единственно.

Действительно, пусть A' — второе решение той же системы. Тогда имеем:

$$\operatorname{div}(A - A') = 0;$$

$$\operatorname{rot}(A - A') = 0;$$

$$(A - A') \cdot n \big|_S = 0.$$

Вектор $A - A'$ образует лапласово поле, т. е.

$$A - A' = \nabla\varphi,$$

$$\Delta\varphi = 0,$$

причем $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ на границе поля. В силу свойств гармонических функций $\varphi = \text{const}$ всюду. Следовательно, $A = A'$.

Для того, чтобы разложение для бесконечной области, приведенное выше, было справедливо для конечной области, необходимо задать соответствующим образом граничные условия на поверхности S.

Пример. Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла. Уравнения Максвелла, описывающие электромагнитные явления, играют в электродинамике такую же большую роль, как, например, уравнение Ньютона в механике. Величины, которые характеризуют электромагнитное поле, — это векторы напряженности электрического и магнитного полей E и H; каждый из них является функцией точки и времени, т. е. $E = E(r, t)$ и $H = H(r, t)$. Электромагнитное поле создается зарядами и токами, распределение которых характеризуется скалярной функцией плотности распределения зарядов $\rho = \rho(r, t)$ и векторной функцией плотности тока $j = j(r, t)$.

Рассмотрим электромагнитное поле в вакууме. Независимо от распределения плотности зарядов ρ и тока $\boldsymbol{j}$ векторы напряжения электромагнитного поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ связаны соотношениями, интегральная форма которых имеет вид:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_L} \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = -\int\limits_{L} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad \text{(I)}$$

$$\iint\limits_{S_\tau} \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = 0. \qquad \text{(II)}$$

Множитель $c = 3\cdot 10^{10}$ *см/сек* равен величине скорости света в вакууме.

Уравнение (I) утверждает, что изменение во времени потока магнитного поля $\iint\limits_{S_L} \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}dS$ через поверхность S_L, опирающуюся на контур L, равно циркуляции электрического поля $\int\limits_{L} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$ вдоль контура L. Этот интеграл в физике часто называют «электродвижущей силой» и первое уравнение описывает известный закон электромагнитной индукции Фарадея.

Уравнение (II) показывает, что поток магнитного поля через замкнутую поверхность S_τ произвольной формы всегда равен нулю. Оба уравнения справедливы независимо от конкретного вида L и S_L.

Применяя формулу Стокса (4.34) к интегралу правой части уравнения (I), можно написать

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_L} \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}dS = -\int\limits_{L} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\iint\limits_{S_L} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

или

$$\iint\limits_{S_L}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \boldsymbol{E}\right)\cdot\boldsymbol{n}dS = 0.$$

И, в силу произвольности S_L,

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -c\operatorname{rot} \boldsymbol{E}. \qquad \text{(I')}$$

Преобразовывая интеграл по поверхности уравнения (II) в интеграл по объему по формуле Остроградского (4.20), найдем

$$\iint\limits_{S_\tau} \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \iiint\limits_{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{H} d\tau = 0,$$

откуда, в силу произвольности объема τ,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \qquad \text{(II')}$$

Уравнения (I — II) и (I'—II') называются *однородной парой* уравнений Максвелла соответственно в интегральной и дифференциальной формах.

Связь векторов напряжения E и H с плотностью распределения зарядов ρ и тока j, определяется *неоднородной парой* уравнений Максвелла, которые также следует рассматривать как опытный факт:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_L} E\cdot ndS = c\int\limits_L H\cdot dl - 4\pi\iint\limits_{S_L} j\cdot ndS, \qquad \text{(III)}$$

$$\iint\limits_{S_\tau} E\cdot ndS = 4\pi\iiint\limits_\tau \rho d\tau. \qquad \text{(IV)}$$

Уравнение (III) утверждает, что изменение во времени потока электрического поля через поверхность S_L, опирающуюся на L, равно циркуляции магнитного поля вдоль контура L (умноженной на c) минус поток плотности тока j (умноженный на 4π) через эту же поверхность S_L.

Уравнение (IV) показывает, что поток электрического поля через замкнутую поверхность S_τ, ограничивающую объем τ, равен заряду (умноженному на 4π), находящемуся внутри объема τ. Оба эти уравнения (III) и (IV) справедливы при произвольных L, S и τ.

Так же как и при рассмотрении однородной пары уравнений, применяя формулы Стокса, можно написать для уравнения (III):

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_L} E\cdot ndS = c\iint\limits_{S_L} n\cdot \operatorname{rot} HdS - 4\pi\iint\limits_{S_L} j\cdot ndS$$

и в силу произвольности S_L:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = c\operatorname{rot} H - 4\pi j. \qquad \text{(III')}$$

Для уравнения (IV), применяя формулу Остроградского, получаем

$$\iint\limits_{S_\tau} E\cdot ndS = \iiint\limits_\tau \operatorname{div} Ed\tau = 4\pi\iiint\limits_\tau \rho d\tau$$

и так как объем τ произволен:

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho. \qquad \text{(IV')}$$

Уравнения (III') и (IV') называют неоднородной парой уравнений Максвелла в дифференциальной форме; системы (I — IV) и (I' — IV') представляют собой систему уравнений Максвелла соответственно в интегральной и дифференциальной формах.

Эта система уравнений описывает электромагнитное поле в вакууме. Если учитывать влияние среды, то войдут дополнительно еще два вектора:— вектор, определяющий поляризуемость единицы объема среды — вектор поляризации $P(r, t)$, и вектор, характеризующий магнитные свойства среды — вектор намагничивания $M(r, t)$. Для различных классов сред зависимость этих векторов от E и H подробно изучается в курсах электродинамики и теоретической физики.

В литературе, наряду с векторами P и M, часто вводятся вектор смещения (электрической индукции) $D = E + 4\pi P$ и вектор магнитной индук-

ции $B = H + 4\pi M$. При этом уравнения Максвелла для среды приобретают вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -c \operatorname{rot} E, \tag{I''}$$

$$\operatorname{div} B = 0, \tag{II''}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = c \operatorname{rot} H - 4\pi j, \tag{III''}$$

$$\operatorname{div} D = 4\pi\rho. \tag{IV''}$$

Приведенная система уравнений электромагнитного поля для среды не является замкнутой, так как в нее входят дополнительно два векторных поля $P(r, t)$ и $M(r, t)$ или $D(r, t)$ и $B(r, t)$. Добавление конкретных уравнений, определяющих для данного класса сред зависимость $P(r, t)$ и $M(r, t)$ или $D(r, t)$ и $B(r, t)$ соответственно и $j(r, t)$ от полей E, H, дополняет рассматриваемую систему и образует исходную систему уравнений для исследования данного класса сред. Так, например, выражение для плотности тока $j = \sigma E$ (σ — электропроводность) дает дополнительное уравнение — это так называемый закон Ома. Аналогично для среды с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной μ устанавливаются зависимости $D = \varepsilon E$ и $B = \mu H$, которые дополняют систему (I'' — IV'').

Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. Весьма важную роль в электродинамике играют вспомогательные функции — так называемые потенциалы: скалярный $\varphi = \varphi(r, t)$ и векторный $A = A(r, t)$. Мы рассмотрим случай вакуума и введем их так, чтобы удовлетворить прежде всего однородной паре уравнений Максвелла

$$\frac{\partial H}{\partial t} + c \operatorname{rot} E = 0, \tag{I'}$$

$$\operatorname{div} H = 0. \tag{II'}$$

Так как дивергенция от ротора произвольного вектора равна нулю, то второму уравнению можно удовлетворить если положить

$$H(r, t) = \operatorname{rot} A(r, t). \tag{4.126}$$

Теперь, подставляя (4.126) в первое уравнение, получим

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} + E\right) = 0. \tag{4.127}$$

Так как ротор от градиента любой функции равен нулю, то уравнению (4.127) можно удовлетворить, если положить $E + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla\varphi$, где φ — произвольная функция от r, t и, следовательно,

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\varphi. \tag{4.128}$$

Заметим, что замена A на $A + \nabla f$ и одновременно замена φ на $\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$ не изменяют векторов напряжения электромагнитного поля E и H.

Действительно, $H = \text{rot}\, A = \text{rot}\,(A + \nabla f) = \text{rot}\, A + \text{rot grad}\, f$ и

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\varphi = -\frac{1}{c}\frac{\partial (A + \nabla f)}{\partial t} - \nabla\left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial f}{\partial t} - \nabla\varphi + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Подставляя (4.127) и (4.128) в неоднородную пару уравнений Максвелла (III′) и (IV′), получим уравнения, которым должны удовлетворять скалярный φ и векторный A потенциалы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\varphi\right) = c\,\text{rot rot}\, A - 4\pi j, \qquad (4.129)$$

$$\text{div}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\varphi\right) = -4\pi\rho. \qquad (4.130)$$

Не ограничивая общности, можно воспользоваться отмеченной выше формулой преобразования для потенциала введением произвольной функции f и наложить на φ и A дополнительное условие (условие Лоренца):

$$\text{div}\, A + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \qquad (4.131)$$

Действительно, поскольку вектор A определен с точностью до градиента произвольный функции, то подчиняя его условию (4.131), можно написать

$$\text{div}\,(A + \nabla f) + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \qquad (4.132)$$

и функция ∇f, бывшая до сих пор произвольной, определится из уравнения (4.132):

$$\Delta f = -\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \text{div}\, A. \qquad (4.133)$$

Используя выражение (4.59)

$$\text{rot rot}\, A = \text{grad div}\, A - \Delta A$$

и соотношение (4.131) и (4.133), получим из (4.129) и (4.130) уравнения для определения A и φ, а следовательно, E и H:

$$\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j, \qquad (4.134)$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \qquad (4.135)$$

Если ввести оператор (деламбертиан)

$$\Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad (4.136)$$

то уравнения (4.134) и (4.135) примут вид:

$$\Box A = -\frac{4\pi}{c} j, \qquad (4.137)$$

$$\Box \varphi = -4\pi\rho. \qquad (4.138)$$

Это — волновые уравнения для потенциалов; они подробно изучаются в курсах математической физики.

Рассмотрим сначала уравнения (I—IV) для вакуума. Умножим скалярно (I′) на H и (III′) на E и сложим полученные произведения

$$E\cdot\frac{\partial E}{\partial t}+H\cdot\frac{\partial H}{\partial t}=cE\cdot\operatorname{rot}H-E\cdot 4\pi j-cH\cdot\operatorname{rot}E.$$

Замечая, что $\operatorname{div}(E\times H)=H\cdot\operatorname{rot}E-E\cdot\operatorname{rot}H$, перепишем это равенство в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{E^2+H^2}{8\pi}=-\operatorname{div}\left[\frac{c}{4\pi}(E\times H)\right]-j\cdot E,$$

или, интегрируя

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\tau}\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,d\tau=-\iiint_{\tau}\operatorname{div}R\,d\tau-\iiint_{\tau}j\cdot E d\tau, \qquad (4.139)$$

где положено

$$R\equiv\frac{c}{4\pi}(E\times H). \qquad (4.140)$$

Используя теорему Остроградского, равенство (4.140) можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\tau}\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,d\tau=-\iint_{S_\tau}R\cdot n dS-\iiint_{\tau}j\cdot E d\tau. \qquad (4.141)$$

Если $j=0$ и $R=0$, то величина, стоящая в левой части равенства (4.141), сохраняется: она играет роль энергии электромагнитного поля, плотность которой равна $\frac{E^2+H^2}{8\pi}$. Вектор R, определенный равенством (4.141), называется вектором потока электромагнитной энергии (или вектором Умова — Пойнтинга).

В общем случае равенство (4.141) устанавливает, что изменение электромагнитной энергии в некотором объеме τ равно потоку вектора Пойнтинга R через поверхность S_τ, ограничивающую этот объем τ, и работе электромагнитного поля над током в этом объеме.

При $j=\rho V$ в выражении, стоящем под знаком последнего интеграла (4.141), величина $d\tau\rho\cdot E$ представляет собой силу электромагнитного поля, действующую на заряд $\rho d\tau$; умножая ее скалярно на скорость V, получим работу в единицу времени; она соответствует потерям на джоулево тепло.

Рассматривая уравнения (I″—IV″) Максвелла в среде и соотношения

$$D=\varepsilon E,\ B=\mu H \text{ и } j=\sigma H, \qquad (4.142)$$

можно получить аналогичным путем уравнение энергии электромагнитного поля для этих классов сред в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\tau}\frac{\varepsilon E^2+\mu H^2}{8\pi}\,d\tau=-\iint_{S_\tau}R\cdot n dS-\iiint_{\tau}\sigma E^2. \qquad (4.143)$$

Выражение для плотности энергии имеет вид $\frac{\varepsilon E^2+\mu H^2}{8\pi}$; для вакуума $\varepsilon=1$, $\mu=1$ и (4.143) совпадает с (4.141). Роль потока вектора энергии

играет по-прежнему $R = \frac{c}{4\pi} E \times H$; последний интеграл соответствует потерям на джоулево тепло: $j \cdot E = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}$ — количество тепла, выделяемое в единице объема среды в единицу времени.

Задачи и упражнения

Задача 1. *Формулы Френе.* Если на пространственной кривой выбрать начало отсчета и установить положительное направление отсчета дуг, то радиус-вектор любой точки на кривой будет вектор-функцией дуги s.

$$r = r(s).$$

Пусть для каждой точки кривой можно определить однозначно три взаимно перпендикулярные оси естественного трехгранника: ось касательной (орт τ), ось главной нормали (орт n) и ось бинормали (орт b) (рис. 4.31).

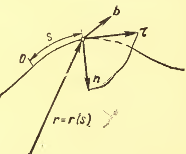


Рис. 4.31. Орты осей естественного трехгранника кривой

Орт τ равен $\tau = \frac{dr}{ds}$

Это следует из того, что $\left|\frac{dr}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta r}{\Delta s}\right| = 1$, а по направлению τ и $\frac{dr}{ds}$ также совпадают, ибо $\frac{dr}{ds}$ направлен по касательной к годографу $r = r'(s)$.

Орт n перпендикулярен к τ, направлен в сторону вогнутости кривой и лежит в соприкасающейся плоскости.

Соприкасающаяся плоскость — это предельное положение плоскости, проведенной через касательную в данной точке M параллельно касательной в соседней точке M', когда M' приближается к M (рис. 4.32). Плоская кривая лежит в своей соприкасающейся плоскости.

Угол между двумя смежными касательными $\Delta\varepsilon$ называется углом смежности касательных.

Орт b определяется векторным произведением

$$b = \tau \times n$$

Поскольку в каждой точке кривой имеем свои значения ортов $\tau(s)$, $n(s)$, $b(s)$, то эти орты могут быть рассматриваемы как вектор-функции скалярного аргумента — дуги s. Определить

$$\frac{d\tau}{ds}, \frac{dn}{ds}, \frac{db}{ds}.$$

Решение

1. $\frac{d\tau}{ds} = n\frac{d\varepsilon}{ds} = n\,\frac{1}{\rho}$

Докажем это. Имеем (рис. 4.32):

$$\left|\frac{d\tau}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\tau|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2|\tau|\sin\frac{\Delta\varepsilon}{2}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}.$$

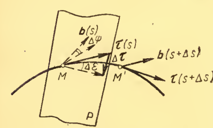


Рис. 4.32. Углы смежности касательных $\Delta\varepsilon$ и бинормалей $\Delta\psi$.

Предельным положением плоскости P, когда $M' \to M$, является положение соприкасающейся плоскости

Эта величина $\left|\frac{d\tau}{ds}\right| = \frac{1}{\rho}$ носит название кривизны кривой (ρ — радиус кривизны).

Вектор $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ лежит в плоскости P, предельное положение которой является соприкасающейся плоскостью. Поскольку $|\tau| = \text{const}$, то $\frac{d\tau}{ds} \perp \tau$ и направлено, как видно из рис. 4.32, в сторону вогнутости кривой. Значит, $\frac{d\tau}{ds}$ направлено по орту n.

Первая формула Френе установлена.

Кривизна кривой $\frac{1}{\rho}$ может быть вычислена по формуле

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\tau}{ds}\right| = \left|\frac{d^2r}{ds^2}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

2. $\frac{db}{ds} = -\frac{1}{T}n.$

Имеем (рис. 4.32):

$$\left|\frac{db}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta b|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2|b|\sin\frac{\Delta\psi}{2}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \frac{1}{T}.$$

Здесь $\Delta\psi$ — угол смежности бинормалей, а величина $\frac{1}{T}$ называется кручением кривой (T — радиус кручения).

Кроме того,

$$\frac{db}{ds} = \frac{d}{ds}(\tau \times n) = \left(\frac{d\tau}{ds} \times n\right) + \left(\tau \times \frac{dn}{ds}\right) = \tau \times \frac{dn}{ds}.$$

Следовательно, вектор $\frac{db}{ds}$ должен быть перпендикулярен τ и b (ибо $|b| = 1$) одновременно, т. е. направлен по оси вектора n.

Из параллельности векторов n и $\frac{db}{ds}$ следует, что соприкасающаяся плоскость кривой поворачивается около касательной к кривой при движении точки по кривой. Мы будем приписывать кручению знак плюс, если при возрастании s соприкасающаяся плоскость поворачивается в направлении от n к b, и минус, если вращение происходит от b к n. Тогда

$$\frac{db}{ds} = -\frac{1}{T}n.$$

Вторая формула Френе установлена.

3. $\frac{dn}{ds} = -\frac{\tau}{\rho} + \frac{b}{T}$.

Эта формула устанавливается простым вычислением:

$$\frac{dn}{ds} = \frac{d}{ds}(b \times \tau) = \frac{db}{ds} \times \tau + b \times \frac{d\tau}{ds} = -\frac{1}{T}(n \times \tau) + \\ + \frac{1}{\rho}(b \times n) = \frac{b}{T} - \frac{\tau}{\rho}.$$

Задача 2. Зная уравнение кривой $r = r(s)$, где s — дуга, найти кручение кривой $\frac{1}{T}$.

Решение. Из второй формулы Френе (см. задачу 1) имеем $\frac{1}{T} = -n \cdot \frac{db}{ds}$. Но $b = \tau \times n$. Поскольку $\tau = \frac{dr}{ds}$ и $n = \rho\frac{d^2r}{ds^2}$, то

$$b = \frac{\frac{dr}{ds} \times \frac{d^2r}{ds^2}}{\left|\frac{dr}{ds} \times \frac{d^2r}{ds^2}\right|} = \rho\left(\frac{dr}{ds} \times \frac{d^2r}{ds^2}\right).$$

Тогда имеем:

$$\frac{1}{T} = -\rho^2 \frac{d^2r}{ds^2} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds} \times \frac{d^2r}{ds^2}\right) = \rho^2 \frac{dr}{ds}\left(\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds^3}\right).$$

Задача 3. Найти проекции ускорения точки на оси естественного трехгранника ее траектории.

Решение. Пусть уравнение движения точки имеет вид:

$$r = r(t).$$

Это уравнение является параметрическим уравнением траектории (параметр t — время).

Тогда скорость V и ускорение W точки равны:

$$V = \frac{dr}{dt}; \quad W = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dV}{dt}.$$

Если задано $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, то всегда можно определить закон движения точки по ее траектории, т. е. $s = s(t)$, где s — дуга траектории. Тогда можно рассматривать

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}[s(t)].$$

Отсюда получим

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau} V,$$

где $V = \frac{ds}{dt}$ — скалярная скорость.

Используя первую формулу Френе, получим

$$\boldsymbol{W} = \frac{V^2}{\rho}\boldsymbol{n} + \frac{dV}{dt}\boldsymbol{\tau}.$$

Итак, ускорение точки целиком лежит в соприкасающейся плоскости и имеет на оси естественного трехгранника проекции

$$W_\tau = \frac{dV}{dt}; \quad W_n = \frac{V^2}{\rho}; \quad W_b = 0.$$

Задача 4. *Круговые вектор-функции.* В плоскости (x_1, x_2) заданы две единичные вектор-функции $\boldsymbol{g}_1(\varphi)$ и $\boldsymbol{g}_2(\varphi)$ в виде ортов ($|\boldsymbol{g}_1| = |\boldsymbol{g}_2| = 1$), составляющих углы φ и $\varphi + \frac{\pi}{2}$ с осью x_1 (рис. 4.33). Найти их разложения по осям x_1 и x_2 и выразить $\frac{d\boldsymbol{g}_1}{d\varphi}$ и $\frac{d\boldsymbol{g}_2}{d\varphi}$ через $\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{g}_2$.

Решение. Из определения $\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{g}_2$ имеем:

$$\boldsymbol{g}_1(\varphi) = \boldsymbol{i}_1\cos\varphi + \boldsymbol{i}_2\sin\varphi; \quad \boldsymbol{g}_2(\varphi) = -\boldsymbol{i}_1\sin\varphi + \boldsymbol{i}_2\cos\varphi.$$

Отсюда получим, дифференцируя по φ и учитывая, что $\boldsymbol{i}_1$ и $\boldsymbol{i}_2$ — постоянные:

$$\frac{d\boldsymbol{g}_1}{d\varphi} = \boldsymbol{g}_2; \quad \frac{d\boldsymbol{g}_2}{d\varphi} = -\boldsymbol{g}_1. \qquad (*)$$

Рис. 4.33. Круговые вектор-функции

Задача 5. Найти проекции скорости и ускорения точки, движущейся в плоскости, на направление радиуса-вектора (радиальные составляющие) и на перпендикуляр к нему (трансверсальные составляющие), если уравнения движения точки имеют вид

$$r = r(t); \quad \varphi = \varphi(t),$$

где $r = |\boldsymbol{r}|$, а φ — угол, который составляет радиус-вектор с осью x_1.

Решение. Введем круговые вектор-функции $\boldsymbol{g}_1(\varphi)$ и $\boldsymbol{g}_2(\varphi)$ так, что $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{g}_1(\varphi)$. Тогда

$$V = \frac{dr}{dt} = \dot{r}\boldsymbol{g}_1(\varphi) + r\frac{d\boldsymbol{g}_1}{d\varphi}\dot{\varphi} = \dot{r}\boldsymbol{g}_1(\varphi) + r\dot{\varphi}\boldsymbol{g}_2(\varphi),$$

где

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}; \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt};$$

$$W = \frac{dV}{dt} = \ddot{r}\boldsymbol{g}_1 + \dot{r}\frac{d\boldsymbol{g}_1}{d\varphi}\dot{\varphi} + (\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\boldsymbol{g}_2 + r\dot{\varphi}^2\frac{d\boldsymbol{g}_2}{d\varphi} =$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{g}_1 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\boldsymbol{g}_2.$$

Отсюда имеем искомые проекции:

$$V_r = \dot{r}; \quad W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2;$$

$$V_\varphi = r\dot{\varphi}; \quad W_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}).$$

Задача 6. Найти уравнение винтовой линии, которая представляет собой траекторию точки, одновременно участвующей в двух равномерных движениях вдоль оси x_3 и во вращении вокруг этой оси. Найти длину дуги винтовой линии.

Показать, что орт касательной к винтовой линии образует постоянный угол с плоскостью (x_1x_2).

Решение. Введем круговую вектор-функцию $\boldsymbol{g}_1(\varphi)$, совпадающую с проекцией на плоскость (x_1, x_2) радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ переменной точки винтовой линии (рис. 4.34). Тогда

$$\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{g}_1(\varphi) + a(\varphi)\boldsymbol{i}_3,$$

где R — радиус окружности, в которую проектируется винтовая линия на плоскость (x_1x_2), а $a(\varphi)$ — проекция $\boldsymbol{r}$ на ось x_3.

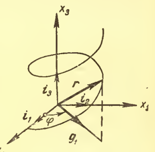


Рис. 4.34. Винтовая линия

По определению винтовой линии

$$\varphi = \omega t; \quad a = Vt,$$

где V — скорость движения точки, описывающей винтовую линию, вдоль оси x_3, а ω — угловая скорость вращения этой точки вокруг той же оси.

Тогда имеем:

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = R\boldsymbol{g}_1(\varphi) + \frac{V}{\omega}\varphi\boldsymbol{i}_3.$$

Это и есть уравнение винтовой линии.

При $V=0$ получим

$$r(\varphi)=Rg_1(\varphi)$$

— уравнение окружности в плоскости (x_1, x_2) с центром в начале координат.

Найдем длину дуги s винтовой линии, т. е. путь, который пройдет по винтовой линии точка, повернувшись вокруг оси x_3 на угол φ. Получим

$$s \doteq \int_0^{\varphi}\left|\frac{dr}{d\varphi}\right|d\varphi=\int_0^{\varphi}\sqrt{R^2+\left(\frac{V}{\omega}\right)^2}\,d\varphi=\sqrt{R^2+\left(\frac{V}{\omega}\right)^2}\,\varphi.$$

Орт касательной τ к винтовой линии равен

$$\tau=\frac{dr}{ds}=\frac{dr}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{ds}=\frac{Rg_2+(V:\omega)\,i_3}{\sqrt{R^2+(V:\omega)^2}}.$$

Имеем:

$$\tau\cdot i_3=\frac{V:\omega}{\sqrt{R^2+(V:\omega)^2}},$$

т. е. орт τ составляет с осью x_3 (и с плоскостью (x_1x_2)) постоянный угол.

Задача 7. Показать, что кривизна и кручение винтовой линии суть постоянные величины.

Ответ.

$$\frac{1}{\rho}=\frac{R}{R^2+(V:\omega)^2};\quad \frac{1}{T}=\frac{V:\omega}{R^2+(V:\omega)^2}.$$

Задача 8. Показать, что если сила, действующая на материальную точку, направлена всегда по касательной к траектории, то траектория точки есть прямая.

Решение. Сила равна $F=mW=m\,\dfrac{d^2r}{dt^2}$. Если она направлена по касательной, т. е. по $V=\dfrac{dr}{dt}$, то $\alpha V=mW$, или

$$\frac{d^2r}{dt^2}+a\,\frac{dr}{dt}=0.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{dr}{dt}+ar=b.$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$r=cf(t)+\frac{b}{a}, \qquad (*)$$

где c — постоянный вектор, а $f(t)$ — функция, удовлетворяющая уравнению

$$f'(t)+af(t)=0.$$

Уравнение (*) показывает (см. задачу 7, гл. 1), что траектория точки действительно прямая; $f(t)$ определяет закон движения по этой прямой.

Задача 9. Показать, что траектория точки является плоской кривой, если ее уравнение движения $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ таково, что

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot \left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3} \right) = 0.$$

Решение. Из условия задачи имеем:

$$\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3} = a \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + b \frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

где a, b — постоянные.

Интегрируя, получим

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = a \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + b\boldsymbol{r} + \boldsymbol{c}.$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$\boldsymbol{r} = -\frac{1}{b}\boldsymbol{c} + f_1(t)\boldsymbol{h}_1 + f_2(t)\boldsymbol{h}_2, \qquad (**)$$

где $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ — постоянные векторы, а f_1 и f_2 — два независимых решения уравнения

$$f'' = af' + b.$$

Уравнение (**) является уравнением плоскости (см. задачу 9 к гл. 1).

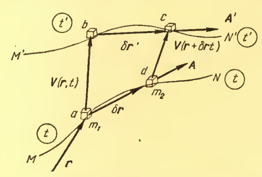


Рис. 4.35.

Если векторные линии поля A в жидкости сохраняются, то частицы, составляющие векторную линию MN в момент времени t, расположатся в любой другой момент времени t' так, что дадут вновь векторную линию $M'N'$ того же поля

Задача 10. Рассмотрим в движущейся жидкости, имеющей поле скоростей $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}, t)$, векторные линии другого векторного поля $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$. Это могут быть векторные линии поля ускорений, поля вихрей и др.

Найти необходимое условие *сохраняемости* этих векторных линий, т. е. условие, при котором эти векторные линии будут все время состоять из одних и тех же частиц жидкости, не разрушаясь (теорема Фридмана).

Решение. Пусть MN — векторная линия — в момент времени t (рис. 4.35) остается векторной линией и в момент $t' = t + \Delta t$, деформируясь в $M'N'$.

Таким образом, для двух произвольных частиц m_1 и m_2 имеем:

$\delta \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A} = 0$ в момент времени t,

$\delta \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{A}' = 0$ в момент времени $t' = t + \Delta t$. Имеем:

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\Delta t.$$

Из векторного четырехугольника $abcd$ (рис. 4.35), отбрасывая бесконечно малые второго порядка и выше, имеем:

$$\delta \boldsymbol{r}' = \delta \boldsymbol{r} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r} + \delta \boldsymbol{r}, t)\Delta t - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}, t)\Delta t = \delta \boldsymbol{r} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x_k}\delta x_k \Delta t =$$

$$= \delta \boldsymbol{r} + (\delta \boldsymbol{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}\Delta t.$$

Таким образом, если $M'N'$ — векторная линия, то

$$\left(\boldsymbol{A} + \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\Delta t\right) \times [\delta \boldsymbol{r} + (\delta \boldsymbol{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}\Delta t] = 0.$$

Раскрывая векторное произведение, отбрасывая малые второго порядка и учитывая $\boldsymbol{A} \times \delta \boldsymbol{r} = 0$, получим

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \times \delta \boldsymbol{r}\right) + [\boldsymbol{A} \times (\delta \boldsymbol{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}] = 0.$$

Учитывая, что $\delta \boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{A}$, получим искомое необходимое условие сохраняемости векторных линий для поля $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$:

$$\left[\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}\right] \times \boldsymbol{A} = 0.$$

Задача 11. Найти градиент поля $\varphi = \varphi(r)$, где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^3 + x_3^2}$.

Решение. Используя (4.60), получим

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr}\operatorname{grad} r = \varphi' \operatorname{grad} r.$$

Но

$$\operatorname{grad} r = \boldsymbol{i}_k \frac{\partial r}{\partial x_k} = \boldsymbol{i}_k \frac{x_k}{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Если не обращаться к готовой формуле (4.60), то, непосредственно рассматривая $\varphi(r) = \varphi[r(x_k)]$, получим, используя выражение для $\operatorname{grad}\varphi$ в декартовой системе координат:

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = i_k \frac{\partial\varphi[r(x_k)]}{\partial x_k} = i_k \frac{d\varphi}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_k} = i_k\varphi'(r)\frac{x_k}{r} = \varphi'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Задача 12. Найти дивергенцию поля $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}\varphi(r)$.

Решение. Заметив, что

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \operatorname{div}\boldsymbol{r}\varphi = \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\cdot\operatorname{grad}\varphi(r)$$

и использовав (4.60), получим

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 3\varphi + r\varphi'.$$

Эту задачу можно решить, используя представление в декартовой системе координат:

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{r}\varphi(r)] = \frac{\partial}{\partial x_k}[x_k\varphi(r)] = 3\varphi + x_k\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x_k} =$$

$$= 3\varphi + \frac{x_k x_k}{r}\varphi' = 3\varphi + \varphi' r.$$

Задача 13. Найти вихрь поля $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}\varphi(r)$.

Решение. Так как

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{rot}\boldsymbol{r}\varphi(r) = \varphi(r)\operatorname{rot}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}\times\operatorname{grad}\varphi(r) \quad \text{и} \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{r} = 0,$$

то по (4.60) имеем:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{r}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}\varphi'(r) = 0.$$

Задача 14. Найти $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$.

Решение.

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \nabla(\boldsymbol{A}_c\cdot\boldsymbol{B}) + \nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_c).$$

По формуле двойного векторного произведения имеем:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),$$

или

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}).$$

Положим

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}_c; \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}; \quad \boldsymbol{c} = \nabla.$$

Тогда

$$\nabla(\boldsymbol{A}_c\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}_c\times(\nabla\times\boldsymbol{B}).$$

Следовательно, и

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_c) = \nabla(\boldsymbol{B}_c\cdot\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{B}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_c\times(\nabla\times\boldsymbol{A}).$$

Окончательно получим

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}.$$

Задача 15. Найти $\operatorname{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$.

Решение. Имеем:

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \nabla\times(\boldsymbol{A}_c\times\boldsymbol{B}) + \nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_c).$$

Раскрывая двойные векторные произведения в таком виде, чтобы оператор ∇ действовал только на вектор, принимаемый переменным, получим:

$$\nabla \times (\boldsymbol{A}_c \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}_c (\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A}_c \cdot \nabla) \boldsymbol{B};$$
$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}_c) = (\boldsymbol{B}_c \cdot \nabla) \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_c (\nabla \cdot \boldsymbol{A}).$$

Окончательно получим

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla) \boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla) \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \operatorname{div} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \operatorname{div} \boldsymbol{A}.$$

Задача 16. Показать, что поле ускорений жидкости $\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}$ имеет потенциал Φ, если поле скоростей потенциально ($\boldsymbol{V} = \nabla\varphi$).

Найти потенциал ускорений.

Решение. Поле ускорений

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{V}$$

можно записать в виде (форма И. С. Громеки)

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla \frac{V^2}{2} - \boldsymbol{V} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{V},$$

если учесть формулу, полученную в задаче 14 этой главы, которая при $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}$ имеет вид

$$\nabla (V^2) = 2 (\boldsymbol{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{V} + 2 \boldsymbol{V} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{V}.$$

Тогда, поскольку $\boldsymbol{V} = \nabla\varphi$, имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla\varphi + \nabla \frac{V^2}{2} = \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} \right).$$

Отсюда следует, что поле $\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}$ имеет потенциал Φ, равный

$$\Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2}.$$

Задача 17. Выразить кинетическую энергию безвихревого движения несжимаемой жидкости в односвязном объеме

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint\limits_{\tau} V^2 d\tau = \frac{\rho}{2} \iiint\limits_{\tau} (\nabla\varphi)^2 d\tau$$

через интеграл по границе этого объема — поверхности S. Показать, что если на границе S объема τ жидкость покоится, то единственно возможным безвихревым движением является покой.

Решение. Используя условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = \operatorname{div} \nabla\varphi = \Delta\varphi = 0$$

и формулу

$$\operatorname{div} \varphi \boldsymbol{A} = \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{A} + \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{A},$$

получим

$$T = \frac{\rho}{2}\iiint_{\tau} \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi d\tau = \frac{\rho}{2}\iiint_{\tau} \operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi)\, d\tau -$$

$$- \frac{\rho}{2}\iiint_{\tau} \varphi \operatorname{div} \nabla\varphi d\tau = \frac{\rho}{2}\iiint_{\tau} \operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi)\, d\tau.$$

Преобразуя объемный интеграл в поверхностный по формуле Остроградского, получим

$$T = \frac{\rho}{2}\iint_{S} \varphi\,(\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi)\, dS = \frac{\rho}{2}\iint_{S} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS. \qquad (*)$$

Если на поверхности S жидкость покоится, т. е. $\boldsymbol{V}|_S = 0$, то $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,|_S = 0$. Тогда из (*) получим $T = 0$, т. е. жидкость в объеме τ находится в покое.

Задача 18. Уравнение равновесия жидкости имеет вид

$$\rho \boldsymbol{f} = \nabla p, \qquad (*)$$

где $\boldsymbol{f}$ — интенсивность массовых сил (в поле тяжести $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$).

Показать, что равновесие жидкости может иметь место только в таком силовом поле, где силовые линии (векторные линии поля $\boldsymbol{f}$) ортогональны к векторным линиям $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}$.

Решение. Возьмем операцию rot от обеих частей (*). Получим

$$\operatorname{rot} \rho\boldsymbol{f} = \nabla\rho \times \boldsymbol{f} + \rho \operatorname{rot} \boldsymbol{f} = 0.$$

Умножая скалярно на $\boldsymbol{f}$ и сокращая на ρ, получим

$$\boldsymbol{f}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = 0.$$

Таким образом, в каждой точке вектор $\boldsymbol{f}$ должен быть перпендикулярен $\operatorname{rot}\boldsymbol{f}$. Так будет в плоском силовом поле (когда $\boldsymbol{f}$ располагаются в параллельных плоскостях). Очевидно, равновесие возможно и в потенциальном поле ($\operatorname{rot}\boldsymbol{f} = 0$); при этом эквипотенциальные поверхности такого поля являются и поверхностями одинаковой плотности (ибо $\nabla\rho \times \boldsymbol{f} = 0$), и поверхностями одинакового давления (ибо $\nabla p \times \boldsymbol{f} = 0$).

Задача 19. Поле скоростей движения вязкой жидкости между двумя параллельными бесконечными пластинками имеет вид

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{i}_1 V_1 = \boldsymbol{i}_1 \left[\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx_1}(x_2^2 - hx_2) + \frac{u_1 - u_2}{h} x_2 + u_2\right],$$

где ось x_1 направлена вдоль нижней пластинки, h—расстояние между пластинками, из которых верхняя имеет скорость u_1, а нижняя u_2; μ, $\frac{dp}{dx_1}$ — постоянные вязкость и градиент давления.

Определить циркуляцию скорости по окружности радиуса R, центр которой находится посредине между пластинками.

Решение. Эту задачу можно решить двумя путями. Непосредственно имеем:

$$\Gamma = \oint_{L_R} V_1 dx_1 = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx_1}\oint_{L_R}(x_2^2 - hx_2)\,dx_1 + \\ + \frac{u_1 - u_2}{h}\oint_{L_R} x_2 dx_1 + u_2\oint_{L_R} dx_1.$$

Выражая x_1 и x_2 через полярный угол φ, получим

$$x_1 = R\cos\varphi; \quad x_2 = \frac{h}{2} + R\sin\varphi.$$

Тогда:

$$\oint_{L_R} dx_1 = -R\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi = 0;$$

$$\oint_{L_R} x_2 dx_1 = -R\int_0^{2\pi}\left(\frac{h}{2} + R\sin\varphi\right)\sin\varphi d\varphi = -\pi R^2;$$

$$\oint_{L_R} x_2^2 dx_1 = -R\int_0^{2\pi}\left(\frac{h}{2} + R\sin\varphi\right)^2\sin\varphi d\varphi = -R^2 h\pi.$$

Таким образом, получим

$$\Gamma = -\frac{u_1 - u_2}{h}\pi R^2.$$

Этот же результат можно получить проще, если воспользоваться теоремой Стокса и в качестве поверхности S взять круг, ограниченный заданной окружностью. Тогда

$$\Gamma = \iint_S \mathrm{rot}_3\, V dS = -\iint_S \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\, dS = \\ = -\iint_S\left[\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx_1}(2x_2 - h) + \frac{u_1 - u_2}{h}\right]dS =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\left[\frac{1}{2\mu}\,\frac{dp}{dx_1}(h + 2r\sin\varphi - h) + \frac{u_1 - u_2}{h}\right] r\,dr\,d\varphi =$$

$$= -\frac{u_1 - u_2}{h}\,\pi R^2.$$

Задача 20. Вихревой линией называется векторная линия поля rot $\boldsymbol{V}$. Вихревой трубкой называется поверхность, образуемая вихревыми линиями, проходящими через некоторый замкнутый контур.

Показать, что поток вихря rot $\boldsymbol{V}$ через сечение вихревой трубки одинаков для всех сечений трубки (теорема Гельмгольца).

Указание. Используя условие соленоидальности поля rot $\boldsymbol{V}$, рассмотреть поток rot $\boldsymbol{V}$ через замкнутую поверхность, образованную двумя произвольными сечениями вихревой трубки и ее боковой поверхностью.

Задача 21. Интенсивностью вихревой трубки называется поток вихря через ее поперечное сечение.

Показать, что интенсивность вихревой трубки равна циркуляции вектора по замкнутому контуру, пересекающему все вихревые линии трубки, т. е. охватывающему трубку.

Указание. Применить теорему Стокса к контуру, охватывающему трубку, и к поверхности, ограниченной им (к сечению трубки).

Задача 22. Пусть поле $\boldsymbol{V}$ скорости несжимаемой жидкости занимает неограниченное пространство. Вследствие несжимаемости всюду div $\boldsymbol{V} = 0$. Пусть в некоторой области этого поля — на линии L — имеем: rot $\boldsymbol{V} \neq 0$, так что циркуляция по любому контуру, охватывающему L, равна Γ. Тогда линию L можно рассматривать как элементарную вихревую трубку, имеющую сечение dS. Требуется отыскать поле вне вихревой трубки (рис. 4.36).

Решение. Согласно основной теореме векторного анализа имеем

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{4\pi}\,\text{rot}\iiint_{\tau}\frac{\text{rot}\,\boldsymbol{V}}{r}\,d\tau$$

(ибо div $\boldsymbol{V} = 0$ всюду).

Рис. 4.36. Поле вихревой трубки

Если $d\boldsymbol{r}$ — элемент вихревой трубки, ориентированный по rot $\boldsymbol{V}$, то

$$\text{rot}\,\boldsymbol{V}d\tau = \text{rot}\,\boldsymbol{V}dS\,|\,d\boldsymbol{r}\,| = d\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{n}\cdot\text{rot}\,\boldsymbol{V})\,dS = d\boldsymbol{r}\Gamma,$$

ибо интенсивность вихревой трубки $\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot} \boldsymbol{V} dS$ равна заданной циркуляции Γ и постоянна вдоль трубки.

Тогда

$$V(M)=\frac{\Gamma}{4\pi}\operatorname{rot}\int_L \frac{d\boldsymbol{r}}{r}=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_L \operatorname{rot}\frac{d\boldsymbol{r}}{r}.$$

Поскольку

$$\operatorname{rot}\frac{d\boldsymbol{r}}{r}=\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\times d\boldsymbol{r}+\frac{1}{r}\operatorname{rot} d\boldsymbol{r}=\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\times d\boldsymbol{r}=\frac{d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}}{r^3},$$

то искомое поле определяется формулой

$$V(M)=\frac{\Gamma}{4\pi}\int_L \frac{d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}}{r^3},$$

где криволинейный интеграл берется вдоль заданной линии L.

Задача 23. Используя результат предыдущей задачи, найти поле прямолинейной вихревой нити и поле кольцевой (круговой) вихревой нити.

Задача 24. Определить потенциальное поле $\boldsymbol{V}$ ($\operatorname{rot}\boldsymbol{V}=0$ всюду), если $\operatorname{div}\boldsymbol{V}=0$ всюду, кроме начала координат. При этом считается заданным поток вектора $\boldsymbol{V}$, равный Q, через некоторую замкнутую поверхность, охватывающую начало координат. Такое поле называется полем точечного источника (см. 4.5).

Решение. Так как $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=0$, то $\boldsymbol{A}=\nabla\varphi$. В силу симметрии поля $\varphi=\varphi(r)$. Тогда

$$\boldsymbol{A}=\nabla\varphi(r)=\frac{d\varphi}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Так как $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$ всюду, кроме начала координат, то из теоремы Остроградского следует, что поток через *любую* замкнутую поверхность, охватывающую начало координат, равен заданной величине Q. Тогда, вычисляя поток $\boldsymbol{V}$ через сферу радиуса r, получим

$$\iint_{S_2}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iint_{S_2}\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iint_{S_2}\frac{d\varphi}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,dS=\frac{d\varphi}{dr}4\pi r^2=Q.$$

Отсюда

$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{Q}{4\pi r^2};\quad \varphi=-\frac{Q}{4\pi r}.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{A}=\frac{Q}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Задача 25. Показать, что если ψ — гармоническая функция ($\Delta\psi=0$), то вектор $\boldsymbol{r}\psi$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta \boldsymbol{r}\psi = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}\Delta \boldsymbol{r}\psi = \frac{\partial^4 (\boldsymbol{r}\psi)}{\partial x_i \partial x_i \partial x_l \partial x_l} = 0 \text{ (бигармонический вектор).}$$

Решение. Последовательно вычисляем:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\boldsymbol{r}\psi) = \frac{\partial}{\partial x_k}(\boldsymbol{i}_l x_l \psi) = \boldsymbol{i}_k \psi + \boldsymbol{r}\frac{\partial \psi}{\partial x_k};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}(\boldsymbol{r}\psi) = \boldsymbol{i}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \boldsymbol{i}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \boldsymbol{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_k} = 2\boldsymbol{i}_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \boldsymbol{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_k}$$

или

$$\Delta(\boldsymbol{r}\psi) = 2\nabla\psi + \boldsymbol{r}\Delta\psi.$$

Так как по условию $\Delta\psi = 0$, то

$$\Delta(\boldsymbol{r}\psi) = 2\nabla\psi.$$

Вычисляя от этого выражения еще раз операцию $\Delta \equiv \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}$ и учитывая, что операция Δ и $\nabla \equiv \boldsymbol{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ переставимы, получим

$$\Delta\Delta(\boldsymbol{r}\psi) = 2\Delta\nabla\psi = 2\nabla\Delta\psi = 0,$$

ибо $\Delta\psi = 0$.

Задача 26. Определить проекции скорости и ускорения точки на оси ортогональной системы криволинейных координат.

Решение. Если заметить, что полное приращение радиуса-вектора точки $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3)$ может быть записано (см. § 4.13) в виде

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3} dq_3 = = H_1 \boldsymbol{e}_1 dq_1 + H_2 \boldsymbol{e}_2 dq_2 + H_3 \boldsymbol{e}_3 dq_3,$$

то выражение для скорости можно представить через производные криволинейных координат по времени:

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = H_1 \dot{q}_1 \boldsymbol{e}_1 + H_2 \dot{q}_2 \boldsymbol{e}_2 + H_3 \dot{q}_3 \boldsymbol{e}_3. \quad (*)$$

Отсюда, например, проекции скорости на оси цилиндрической системы координат равны:

$$V_r = H_1 \dot{R} = \dot{R}; \quad V_\varphi = H_2 \dot{\varphi} = R\dot{\varphi}; \quad V_{x_3} = H_3 \dot{x}_3 = \dot{x}_3.$$

Для определения проекций W_k, ускорения $\boldsymbol{W}$, напишем

$$W_k = \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{e}_k = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} \cdot \frac{1}{H_k} \frac{d\boldsymbol{r}}{dq_k}.$$

Отсюда (по k не суммируется!)

$$H_k W_k = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(V \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k}\right) - V \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial q_k}\right). \qquad (**)$$

Но, дифференцируя (*) по $\dot{q}_k$, получим

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = H_k e_k = \frac{\partial r}{\partial q_k}.$$

Кроме того,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial r}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial r}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial r}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial q_k}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial r}{\partial q_i}\dot{q}_i =$$
$$= \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{dr}{dt} = \frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

Поэтому, заменяя в (**) $\frac{\partial r}{\partial q_k}$ на $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}$ и $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial q_k}\right)$ на $\frac{\partial V}{\partial q_k}$, получим

$$H_k W_k = \frac{d}{dt}\left(V \cdot \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}\right) - V \cdot \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{V^2}{2}\right),$$

или

$$W_k = \frac{1}{H_k}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right),$$

где $T = \frac{V^2}{2} = \frac{1}{2}(H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2)$ — кинетическая энергия единичной массы.

Задача 27. Показать, что если r — расстояние от точки (x^1, x^2, x^3) до (ξ^1, ξ^2, ξ^3), то функция $f(x^1, x^2, x^3) \equiv \frac{\rho\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t - \frac{r}{c}\right)}{r}$, удовлетворяет уравнению $\Box f = 0$, где в операторе $\Box$ берется дифференцирование по x^1, x^2, x^3.

Решение. Вычислим Δf.

$$\nabla f = \frac{1}{r}\nabla\rho + \rho\nabla\frac{1}{r}.$$

Используя (4.60) и обозначая через ρ' производную по аргументу $t - \frac{r}{c}$, получим

$$\nabla f = \frac{1}{r}\left(-\frac{\rho'}{c}\nabla r\right) - \frac{\rho}{r^2}\nabla r = -\left(\frac{\rho'}{cr} + \frac{\rho}{r^2}\right)\nabla r = -\left(\frac{\rho'}{cr} + \frac{\rho}{r^2}\right)\frac{r}{r}.$$

Теперь

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = -\operatorname{div} \boldsymbol{r}\left(\frac{\rho'}{cr^2} + \frac{\rho}{r^3}\right) = -\left(\frac{\rho'}{cr^2} + \frac{\rho}{r^3}\right)\operatorname{div} \boldsymbol{r} -$$

$$- \boldsymbol{r} \cdot \nabla\left(\frac{\rho'}{cr^2} + \frac{\rho}{r^3}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{\rho'}{cr^2} + \frac{\rho}{r^3}\right) - \boldsymbol{r} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}\left(-\frac{\rho''}{c^2r^2} - \frac{2\rho'}{cr^3} - \frac{\rho'}{cr^3} - \frac{3\rho}{r^4}\right) = \frac{\rho''}{c^2r}.$$

Но

$$\rho'' = \frac{\partial^2 \rho}{\partial\left(t - \frac{c}{r}\right)^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = r\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Отсюда $\Delta f = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, или $\Box f = 0$.

Можно показать, рассуждая аналогично тому, как это делается при получении решения уравнения Пуассона $\Delta f = \rho$, что решение уравнения $\Box f = -4\pi\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ в неограниченном пространстве при конечном распределении $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ может быть представлено в виде

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = \iiint \frac{\rho\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{r}{c}\right)}{r}\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

где $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$ и интеграл распространен на всю область определения ρ.

Таким образом, решения уравнений (4.137) и (4.138) могут быть записаны в виде

$$\boldsymbol{A}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\mu}{c} \iiint \frac{\boldsymbol{j}\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{r\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\right)}{r}\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (4.144)$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{c} \iiint \frac{\rho\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{r\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\right)}{r}\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (4.145)$$

Эти решения показывают, что заряд и ток в точке (ξ_1, ξ_2, ξ_3) влияют на потенциалы в точке (x_1, x_2, x_3) с запаздыванием на время $\frac{r\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}$. Действие потенциала запаздывает на время, за которое сигнал, распространяющийся в среде со скоростью $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, пройдет расстояние r между точками. Эти решения называются решениями в виде *запаздывающих потенциалов*.

Задача 28. Показать, что при отсутствии свободных зарядов ($\rho = 0$) в диэлектрике ($\boldsymbol{j} = 0$), скорость распространения электромагнитных волн равна $\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

Решение. Используя уравнения Максвелла (I″—IV″) при $\boldsymbol{j} = 0$ и $\rho = 0$, получим, беря, например, rot от третьего из них:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}.$$

Учитывая первое и второе уравнения, получим

$$\Delta \boldsymbol{H} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}. \qquad (4.146)$$

Аналогично можно получить

$$\Delta \boldsymbol{E} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \qquad (4.147)$$

Из этих волновых уравнений следует, что если в какой-то момент времени t_0 будут заданы функции $\boldsymbol{E}_{|t=t_0} = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{H}_{|t=t_0} = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$, то во все последующие моменты времени будет наблюдаться волновой процесс, причем скорость распространения волн равна $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Задача 29. Показать, что функция

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \quad (\boldsymbol{H}_0 = \text{const}) \qquad (4.148)$$

удовлетворяет уравнению (4.146) при $|\boldsymbol{k}| = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}$.

Решение. Вычисления дают

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = (i\omega)^2 \boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} = -\omega^2 \boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} = -\omega^2 \boldsymbol{H},$$

$$\Delta \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \Delta e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} = \boldsymbol{H}_0 e^{i\omega t}\,\Delta e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}.$$

Учитывая выражения для скалярного произведения $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_m x^m$ и градиента $\nabla = \boldsymbol{e}_n \frac{\partial}{\partial x^n}$, находим

$$\nabla e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} = \nabla e^{-ik_m x^m} = \boldsymbol{e}_n \frac{\partial}{\partial x^n}\, e^{-ik_m x^m} = -i\boldsymbol{e}_n k_n e^{-ik_m x_m} =$$

$$= -i\boldsymbol{k}e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}.$$

Теперь

$$\Delta e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} = \nabla\cdot\nabla e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} = (i\boldsymbol{k}\cdot i\boldsymbol{k})\, e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} = -(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_n) e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})},$$

$$\Delta H = -(k\cdot k) H_0 e^{i(\omega t - k\cdot r)} = -(k\cdot k) H.$$

Следовательно, подставляя $\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$ и ΔH в уравнение (4.146), получим

$$\Delta H - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \left(-k\cdot k + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2\right) H = 0.$$

Отсюда имеем

$$|k| = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}.$$

Вектор k называется волновым вектором. Величину волнового вектора можно выразить через длину волны λ — расстояние по направлению k, определяющее точки, где H в любой фиксированный момент времени принимает одинаковые значения. Действительно, длина волны λ определяется из равенства

$$e^{i(k\cdot r)} = e^{i\left[k\cdot\left(r + \lambda\frac{k}{k}\right)\right]} = e^{ik\cdot r}e^{i\lambda k}.$$

Отсюда $\lambda k = 2\pi$ и $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Рассмотренное решение носит название *плоских монохроматических волн*. В них все величины являются простыми гармоническими функциями времени, и поэтому любую волну можно представить в виде совокупности монохроматических волн с различными частотами ω и векторами k. Это представление является ни чем иным, как представлением в виде ряда или интеграла Фурье.

Волна называется плоской, ибо ее фронт (поверхность постоянной фазы) является плоскостью из семейства $k\cdot r = \text{const}$. Эти плоскости (см. задачу 9 гл. I) перпендикулярны волновому вектору k, так что плоская волна всегда распространяется в направлении, определяемом волновым вектором k.

Задача 30. Найти закон распространения плоских монохроматических волн в проводнике с конечной проводимостью.

Решение. Внутри проводников нет свободных зарядов ($\rho = 0$), а плотность тока на основании закона Ома пропорциональна напряженности поля E, т. е. $j = \sigma E$, где σ — удельная проводимость проводника.

Учитывая эти замечания, из системы (I″ — IV″) получим

$$\left.\begin{array}{llll} \operatorname{rot} H = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}E & (1) & \operatorname{div} E = 0 & (3) \\ \operatorname{rot} E = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t} & (2) & \operatorname{div} H = 0 & (4) \end{array}\right\} \quad (149)$$

Беря rot от первого уравнения, получим

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{4\pi\sigma}{c}\text{rot}\,\boldsymbol{E}.$$

Учитывая второе и третье уравнения (4.149), получим:

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \Delta \boldsymbol{H} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0.$$

Аналогично получим

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \Delta \boldsymbol{E} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0.$$

Ищем решение, например, уравнения для $\boldsymbol{E}$ в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}. \tag{150}$$

Подставляя это выражение в уравнение, получим для волнового вектора уравнения

$$-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}i\omega + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2 = 0. \tag{4.151}$$

Отсюда ясно, что величина $|\boldsymbol{k}|$ должна быть комплексной поэтому вектор $\boldsymbol{k}$ будем искать в виде

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 + i\boldsymbol{k}_2.$$

Подставляя это выражение в (4.151), получим

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2; \quad k_1 k_2 = -\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2\cos\theta},$$

где $\cos\theta = \cos(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2)$, так что $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$ (ибо $k_1 k_2 \gtrless 0$).

Определяя отсюда величины k_1 и k_2, получим

$$k_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega\cos\theta}\right)^2} + 1\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega\cos\theta}\right)^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Используя выражение для $\boldsymbol{k}$, решение для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ можно, записать в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r})} e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r})},$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r})} e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r})}.$$

Так как вектор $\boldsymbol{k}_1$ направлен в сторону распространения волн и $\cos(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) < 0$, то поскольку $\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} > 0$, имеем $\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} < 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае конечной проводимости проводника плоские монохроматические волны представляют собой *волны затухающие.*

Упражнения

1. Материальная точка движется согласно уравнению движения

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} \cos \omega t + \boldsymbol{b} \sin \omega t,$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ω — постоянные, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки.

Показать, что сила, действующая на точку, является центральной (направленной все время к началу координат).

2. Показать, что:

1) $\operatorname{grad} r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$;

2) $\operatorname{grad} r^n = n r^{n-2} \boldsymbol{r}$ $(n \neq 2)$;

3) $\operatorname{grad} \frac{k}{r} = -\frac{k}{r^3} \boldsymbol{r}$;

4) $\operatorname{grad} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}$;

5) $\operatorname{grad} [\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} \varphi(r)] = \boldsymbol{a} \varphi(r) + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}) \frac{\boldsymbol{r} \varphi'(r)}{r}$;

6) $\operatorname{grad} \ln r = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$,

где $\boldsymbol{a}$, n, k — постоянные.

3. Показать, что:

1) $\operatorname{div} \boldsymbol{r} = 3$;

2) $\operatorname{div} a\boldsymbol{r} = 3a$;

3) $\operatorname{div} r^n \boldsymbol{c} = n r^{n-2} (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{c})$ $(n \neq 2)$;

4) $\operatorname{div} r^2 \boldsymbol{c} = 2 (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{c})$;

5) $\operatorname{div} (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) = 0$;

6) $\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0$;

7) $\operatorname{div} r^n \boldsymbol{r} = (n+3) r^n$;

8) $\operatorname{div} \boldsymbol{r} (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r}) = 4 (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})$;

9) $\operatorname{div} \boldsymbol{a} (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r}) = \operatorname{div} \boldsymbol{c} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$;

10) $\operatorname{div} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{c} = -2 (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})$;

11) $\operatorname{div} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{r} = -2 (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})$.

4. Показать, что:

1) $\operatorname{rot} \boldsymbol{r} = 0$;

2) $\operatorname{rot} \boldsymbol{r} (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}$;

3) $\operatorname{rot} (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{c}$;

4) $\operatorname{rot} \boldsymbol{c} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$;

5) $\operatorname{rot} [(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$;

6) $\operatorname{rot} [(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{r}] = 3\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}$.

5. Найти дивергенцию и вихрь поля скоростей $\boldsymbol{V}$ и поля ускорений $\boldsymbol{W}$ твердого тела, вращающегося вокруг непод-

вижной точки, зная, что

$$V = \omega \times r; \quad W = \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r),$$

где ω, ε — постоянные векторы.

6. Показать, что поток радиуса-вектора r через любую замкнутую поверхность, ограничивающую объем τ, равен 3τ.

7. Вычислить циркуляцию по окружности радиуса R с центром в начале координат векторных полей:

$$A = \frac{1}{2}(-x_2 i_1 + x_1 i_2);$$

$$B = (x_1 x_2 + 1)\, i_2 + \left(\frac{x_1^2}{2} + x_1 + 2\right) i_2.$$

8. Показать, что

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{i,\, jk} - \Gamma_{k,\, ij}\,.$$

9. Показать, что для ортогональных координат имеют место выражения: $\Gamma^i_{jk} = 0$, если значения i, j, k — различны;

$$\Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\ln H_i; \qquad \Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial \lambda^j}\ln H_i; \qquad \Gamma^i_{jj} = \frac{1}{2H_i}\,\frac{\partial H_j}{\partial \lambda^i},$$

причем здесь не предполагается суммирования по дважды повторяющимся индексам $i \neq j$.

10. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(g_{ij} A^i B^j\right) = A_{l;\, k} B^l + A^l B_{l;\, k}\,.$$

11. Доказать, что ковариантная производная от абсолютной величины вектора равна

$$|A|_{;\, i} = \frac{1}{|A|}\, A_{j;\, i} A^j.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Александр Иванович Борисенко
Иван Евгеньевич Тарапов

Векторный анализ
и начала тензорного исчисления

Редактор *Д. А. Тальский*
Художественный редактор *И. Ф. Муликова*
Технический редактор *Т. Д. Гарина*
Корректор *В. А. Орлова*

Сдано в набор 17/XII-1962 г. Подписано к печати 28/V-63 г. Бумага $60 \times 90^1/_1$. 16,5 печ. л. 15,58 уч. изд. л. Тираж 20000. Т — 04133.
Изд. № ФМХ/158. Цена 57 коп.
Государственное издательство «Высшая школа»,
Москва К-62, Подсосенский пер., 20

Типография «Татполиграф» Министерства культуры ТАССР. Казань, ул. Миславского, д. 9.


57 коп.